

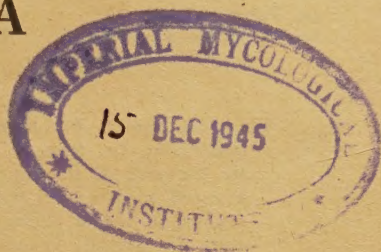
ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTIFICA

ARGENTINA

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO



SETIEMBRE 1945 — ENTREGA III — TOMO CXL

SUMARIO

	Pág.
E. A. DE CESARE. — Teoría sintética de los elementos imaginarios, según el método de C. Segre	177
EMILIO REBUELTO. — Tarifas ferroviarias de utilidad máxima (<i>Continuación</i>)	222

SECCIÓN CONFERENCIAS:

SIMÓN A. DELPECH. — El efecto de entalladura en la mecánica de los materiales	243
---	-----

Buenos Aires
CALLE SANTA FE 1145

1945

SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †	Dr. Carlos Darwin †	Dr. Walter Nernst †
Dr. Mario Isola †	Dr. César Lombroso †	Dr. Alberto Einstein
Dr. Germán Burmeister †	Ing. Luis A. Huergo †	Dr. Cristóbal M. Hicken †
Dr. Benjamin A. Gould †	Ing. Vicente Castro †	Dr. Angel Gallardo †
Dr. R. A. Philippi †	Dr. Juan J. J. Kyle †	Dr. Eduardo L. Holmberg †
Dr. Guillermo Rawson †	Dr. Estanislao S. Zeballos †	Ing. Guillermo Marconi †
Dr. Carlos Berg †	Ing. Santiago E. Barabino †	Ing. Eduardo Huergo †
Dr. Valentín Balbin †	Dr. Carlos Spegazzini †	Dr. Enrique Ferri †
Dr. Florentino Ameghino †	Dr. J. Mendizábal Tamborel †	

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. José Babini; Dr. Horacio Damianovich; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo A. Fester; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollan (h.); Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Emiliano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Alfredo Sor-delli; Dr. Reinaldo Vanossi; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1945-1946)

<i>Presidente</i>	Doctor Gonzalo Bosch
<i>Vicepresidente 1°</i>	Ingeniero Enrique Chanourdie
<i>Vicepresidente 2°</i>	Doctor Jorge Magnin
<i>Secretario de actas</i>	Doctor Carlos A. Bertomeu
<i>Secretario de correspondencia</i>	Doctor E. Eduardo Krapf
<i>Tesorero</i>	Ingeniero César M. Polledo
<i>Bibliotecario</i>	Ingeniero José M. Páez
	Ingeniero Alfredo G. Galmarini
	Ingeniero Gastón Wunenburger
	Ingeniero Eduardo M. Huergo
	Ingeniero Carlos A. Lizer y Trelles
<i>Vocales</i>	Doctor Reinaldo Vanossi
	Ingeniero Belisario Alvarez de Toledo
	Doctor José Llanús
	Ingeniero Juan B. Marchionatto
	Ingeniero Carlos M. Gadda
	Ingeniero Antonio Arena
	Ingeniero Juan B. Berrino
	Ingeniero Anecto J. Bosisio
<i>Suplentes</i>	Ingeniero Héctor Ceppi
	Doctor Elías A. De Cesare
	Ingeniero Pedro Rossell Soler
<i>Revisores de balances anuales</i>	Doctor Antonio Casacuberta
	Arquitecto Carlos E. Géneau

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Artº 10 del Reglamento de los "ANALES" (modificado por la J. D. en su sesión de fecha 4 de septiembre 1941). Los escritos originales destinados a la Dirección de los "Anales", serán remitidos a la Administración de la Sociedad, calle Santa Fe 1145, a los efectos de registrar la fecha de entrega para luego enviarlos al señor Director. La Sociedad no tomará en consideración las observaciones de los autores que se refieran a cualquier anomalía, si no se ha cumplido con el requisito indicado.

TEORIA SINTETICA DE LOS ELEMENTOS IMAGINARIOS, SEGUN EL METODO DE C. SEGRE ⁽¹⁾

POR EL

PROF. DR. E. A. DE CESARE

« Il n'y a qu'une manière d'avancer les sciences, c'est de les simplifier, ou d'y ajouter quelque chose de nouveaux: s'il pouvait y en avoir une de les faire rétrograder, ce serait de compliquer ce qui avait été rendu simple, et de remettre un voile sur ce qui avait été découvert ».

Poincaré. - Réclamations contre les Exercices de Cauchy.

(Bulletin des Sciences de Férussac, t. VII, pág. 226) ⁽²⁾.

NOTA: No conocemos, en español, ninguna exposición sistemática de la teoría del imaginarismo en Geometría Sintética, según el método de C. SEGRE. REY PASTOR, en su obra [15], pág. 301, al referirse al método de SEGRE, expone los teoremas relativos a los pares armónicos; a que si dos pares son armónicos, uno al menos debe ser real; y el teorema que se refiere a la pertenencia de un par imaginario a una involución real, pero no prosigue la exposición de la teoría pues, como se comprende, la referida obra [15] es una exposición de conjunto, y no un tratado sistemático de Geometría Proyectiva.

En los tratadistas italianos, aparte de la memoria fundamental de SEGRE [17], BERZOLARI [3] y SANNIA [16] son los autores por nosotros conocidos, que exponen la teoría en forma completa; pero estas obras están agotadísimas y son de difícil, por no decir imposible, adquisición para los lectores americanos. SEVERI [19] expone elementos suficientes para instituir la teoría, pero en general hace la exposición en el lenguaje de las involuciones, más bien que en el lenguaje de los pares de elementos. También ENRIQUES [8] da elementos suficientes para instituir la teoría del imaginarismo.

(1) C. SEGRE: *Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva Sintetica*. Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. 38 - 2ª serie (1886).

(2) Frontispicio del « *Traité des Propriétés Projectives de Figures* ». Por J. V. Poncelet - Tomo II - Deuxieme edition - Gauthier - Villars, 1886.

Nos ha parecido, sin embargo, oportuna la redacción de este trabajo en español, utilizando frecuentemente, como es natural, las obras más arriba citadas. Creemos así rendir (aunque modestamente), un merecido homenaje al Dr. Julio Rey Pastor, al cumplirse los veinticinco años de su enseñanza matemática en la Argentina, así como a su abundante y fecunda obra de conferencista y de publicista en nuestro país.

Hemos elegido este argumento de Geometría pura, al recordar que el Dr. Rey Pastor se inició como geómetra, logrando ya desde sus años mozos sobresalir en esta disciplina, así como formar escuela en su patria; de sus discípulos, entre otros, cabe recordar a O. Fernández Baños, P. de Pineda y Gutiérrez, quienes han procurado continuar la obra geométrica por él iniciada.

Entre nosotros, la obra matemática llevada a cabo por el Dr. Julio Rey Pastor ha sido preponderantemente de carácter analítico, y fruto de esa labor la constituye el conjunto de jóvenes matemáticos argentinos, todos ellos dedicados al estudio del Análisis.

Es lástima (eso pensamos desde nuestro punto de vista) que, en nuestro medio, no haya dado el mismo impulso al estudio de la geometría. Creemos, no obstante la actual orientación del Dr. J. Rey Pastor, que su estructura mental es esencialmente de geómetra; y cuando esto decimos, nos place recordar el pensamiento enunciado por Blas Pascal, en su tratado «De l'Esprit Géométrique», [12], pág. 360: «... nous voyons par expérience qu'entre esprits égaux et toutes choses pareilles, celui qui a de la géométrie, l'emporte et acquiert une vigueur toute nouvelle ».

INTRODUCCIÓN

El geómetra CHR. PAULUS, fué el primero que identificó el concepto de par de elementos imaginarios sobre una forma de 1ª especie, mediante una involución elíptica entre elementos reales (Véase: *Grundlinien der neueren ebenen Geometrie* - Stuttgart, 1853 - Archiv Math. Ph. (1) 21 (1853), pág. 175; (1) 22 (1854), pág. 121) y si bien Paulus definió con precisión los conceptos de incidencia y coincidencia entre elementos imaginarios, no llegó, sin embargo, a establecer una teoría rigurosa y general del imaginarismo geométrico.

Fué K. G. CHR. VON STAUDT quien desarrolló con toda prolijidad una teoría rigurosa de los elementos imaginarios, en tanto que entes geométricos, independientes de toda consideración de carácter analítico, es decir, fué el primero en instituir una teoría sintética pura de los entes imaginarios (Véase: *Beiträge zur Geometrie der Lage*).

STAUDT no sólo identificó el concepto de elementos imaginarios conjugados con una involución elíptica, sino que agregó una idea

nueva, tan sencilla como fecunda, a saber: asoció la involución elíptica con cada uno de los sentidos opuestos de la forma sostén de la involución, con lo que logró separar los elementos imaginarios, dando a cada uno de ellos su propia personalidad y haciendo posible el estudio de cada elemento imaginario en sí mismo considerado.

El empleo sistemático del imaginarismo en geometría se introduce con la escuela de Monge; y como dice Enriques ([9] tom. 2, pág. 271), a MONGE se debe la feliz intuición consistente en extender a una figura, en la cual llegan a faltar algunos elementos auxiliares volviéndose imaginarios, propiedades demostradas en la hipótesis de la real existencia de tales elementos.

MONGE emplea este método sin preocuparse de su demostración. CARNOT, con la introducción de las llamadas *figuras correlativas*, pretende dar una justificación del método seguido por MONGE. J. V. PONCELET ([3] tom. 1, pág. 49-361) introduce su famoso *principio de continuidad*, consistente en afirmar, por una parte, la unidad que existe entre todas las figuras que se deducen las unas de las otras mediante proyecciones y secciones y, por otra parte, la completa equivalencia entre figuras que se deducen unas de otras por una deformación continua, siempre que queden satisfechas ciertas condiciones generales. Con este principio pretendía justificar la aplicación general de los resultados y de los métodos a aquellos casos en que la representación analítica implicare la presencia de elementos imaginarios.

Enunciando su principio de continuidad, se coloca Poncelet en un punto de vista general, pues, como dice E. BOMPIANI (véase [4] parte I, vol. II, pág. 273), «no es un conjunto de reglas que hacen pasar de una figura a otra, como lo exigía la teoría de las figuras correlativas de CARNOT, lo que puede dar a la geometría la misma generalidad que al álgebra». «Es necesario dar a la forma del pensamiento geométrico la misma amplitud que tiene el álgebra, dejando indeterminadas algunas relaciones de posición y de magnitud, de donde nace el concepto de *forma indeterminada o general* de una figura acerca de la cual se puede razonar».

CHASLES introduce el *principio de las relaciones contingentes*, considerando el método de Monge suficientemente justificado por el análisis algebraico (Véase [5], *Preface*, pág. XIV).

Pero la teoría del imaginarismo instituída por STAUDT, volvió superfluos estos principios de continuidad y de contingencia, ahuyentando definitivamente, como dice G. LORIA (véase [11], pág. 330), el «espectro» del imaginarismo, que tanto obsesionó a STEINER en los últimos años de su vida.

PAULUS había considerado como idénticos los conceptos de «par de elementos imaginarios» e «involución elíptica». STAUDT, como antes se dijo, logró dar personalidad a cada uno de los elementos imaginarios. Pero la teoría llega a hacerse sumamente complicada cuando se quiere estudiar cada uno de los elementos imaginarios *per se*.

Se debe a CORRADO SEGRE una teoría elemental, de carácter puramente gráfico, de los pares de elementos imaginarios. En efecto, SEGRE no define cada elemento imaginario por sí mismo, sino que parte del concepto de «*par de puntos imaginarios*», teoría que resulta suficiente en todos aquellos casos en que no es necesario establecer ninguna separación entre elementos imaginarios conjugados. Como es sabido, todo par de puntos reales define una involución hiperbólica, e inversamente, dicho par de puntos queda definido por la involución.

SEGRE extiende, mediante oportunas definiciones, este mismo concepto, generalizándolo al caso de las involuciones elípticas. Esta diferencia entre el método de STAUDT y el de SEGRE constituye, como dice JULIO REY PASTOR (véase [15], pág. 293), una división natural de los métodos posteriores de representación de los elementos imaginarios: entre los que separan cada elemento de su conjugado y entre los que consideran tales elementos como asociados.

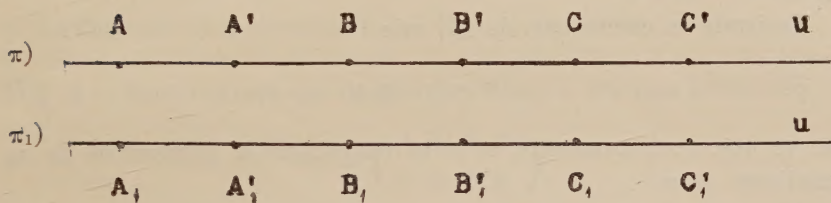
La teoría de STAUDT constituye una particular interpretación sintética de los elementos imaginarios, lo mismo que la de SEGRE. Pero como dice Enriques, (véase [8], pág. 442), la teoría de STAUDT «responde a la necesidad del pensamiento de asignar algún objeto concreto en el cual se reflejen los símbolos, pero ofrece, en general, un escaso interés geométrico, en virtud del carácter abstracto de los entes introducidos». «El verdadero interés geométrico, en el sentido intuitivo de la palabra, corresponde al caso en que el imaginarismo sirve como elemento auxiliar para la extensión analógica de propiedades, que se vuelven más evidentes por comparación con ciertos elementos reales».

A esta necesidad, de carácter intuitivo, o si se prefiere, de carácter psicológico, responde ampliamente la teoría de Segre; y es por ello que en este trabajo nos proponemos exponer ⁽¹⁾, en forma metódica, la parte elemental de la teoría geométrica del imaginarismo, tal como ha sido instituída por C. SEGRE.

La teoría de SEGRE constituye, en el fondo, una continuación natural de la teoría de la involución, pero hecha con el empleo sistemático de nuevas denominaciones, que iluminan y dan realidad, por así decirlo, a los elementos imaginarios. Se trata de una teoría sencilla, armónica y bella, dentro de la simplicidad de sus líneas.

§ 1. — Consideremos una forma fundamental de 1ª especie, por ejemplo, una puntual u , y en ella definida una proyectividad

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$



Dada otra puntual u_1 , establezcamos entre u y u_1 , una proyectividad ω , y suponiendo

$$\omega = \begin{pmatrix} A & A' & B & \dots & \\ A_1 & A'_1 & B_1 & \dots & \end{pmatrix}$$

que dará definida sobre u_1 , una proyectividad π_1

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \end{pmatrix}$$

que puede construirse por intermedio de la π y de la ω .

(1) Véase la nota anterior.

En efecto, podemos pasar del elemento A_1 , al elemento A'_1 , mediante las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}\omega^{-1}A_1 &= A \\ \pi A &= A' \\ \omega A' &= A'_1.\end{aligned}$$

De modo que, si con la notación $R \equiv QP$, indicamos el producto R que resulta de aplicar *primero* P y *luego* Q , se tendrá para

$$\pi_1 \equiv \omega \pi \omega^{-1} \quad [1]$$

y en consecuencia será

$$\pi_1 A_1 = A'_1$$

La proyectividad π_1 , definida mediante la π y la ω por la relación [1], se dice que es la *transformada proyectiva* de π mediante la ω . Se dice también que π y π_1 son proyectividades *equivalentes proyectivamente*.

Teniendo en cuenta que de [1] sale

$$\pi \equiv \omega^{-1} \pi_1 \omega \quad [2]$$

se ve que, recíprocamente, π es la transformada proyectiva de π_1 mediante la ω^{-1} .

Supongamos que π admita un elemento unido y sea

$$\pi M = M$$

Si es

$$\omega M = M_1$$

es también

$$\pi_1 M_1 = \omega \pi \omega^{-1} M_1 = \omega \pi M = \omega M = M_1$$

de donde resulta que M_1 es elemento unido en la proyectividad π_1 . Este resultado nos dice que: *Las proyectividades π , π_1 , son contemporáneamente de la misma especie, a saber: o ambas hiperbólicas; o ambas parabólicas o ambas elípticas.*

Este enunciado nos hace ya prever que dos proyectividades no serán, en general, proyectivamente equivalentes. En efecto, si llamamos, en una proyectividad hiperbólica cuyos elementos unidos

son M , N , y A , A' un par de elementos homólogos, *invariante absoluto* de la proyectividad a la relación

$$(M, N, AA') = \lambda$$

entonces puede demostrarse el

TEOREMA. — *Condición necesaria y suficiente para que dos proyectividades sobre formas de 1ª especie sean proyectivamente equivalentes, es que admiten el mismo invariante absoluto.* (Véase [8], pág. 134).

Mientras que para dos proyectividades parabólicas, vale el

TEOREMA. — *Dos proyectividades parabólicas sobre formas de 1ª especie, son siempre proyectivas.* (Véase [8], pág. 135).

Este teorema queda subordinado al anterior, si se conviene en llamar invariante absoluto de una proyectividad parabólica a la relación

$$(M M A A') = \lambda$$

y atribuyendo a λ el valor 1.

§ 2. — Supongamos que la proyectividad π sea una involución

$$\pi = \begin{pmatrix} A & A' & B & B' \\ A' & A & B' & B \end{pmatrix}$$

Para la transformada proyectiva π_1 mediante la ω , resultará

$$\begin{aligned} \pi A_1 &= \omega \pi \omega^{-1} A_1 = \omega \pi A = \omega A' = A_1' \longrightarrow \pi_1 A_1 = A_1' \\ \pi_1 A_1' &= \omega \pi \omega^{-1} A_1' = \omega \pi A' = \omega A = A_1 \longrightarrow \pi A_1' = A_1 \end{aligned}$$

o sea que los elementos A_1, A_1' , homólogos en π_1 , se corresponden doblemente y, en consecuencia, la π_1 será también una involución. Podemos, así, enunciar este resultado: *La transformada proyectiva de una involución, es una involución.*

§ 3. — Estudiemos el caso en que las formas u y u_1 sean superpuestas: En la relación

$$\pi_1 = \omega \pi \omega^{-1} \quad [1]$$

podrá suceder que se tenga $\pi_1 = \pi$. Entonces, la [1] da

$$\pi = \omega \pi \omega^{-1} \quad [2]$$

Cuando valga la [2], diremos que la π se transforma en sí misma mediante la ω . Si tenemos en cuenta que en las actuales circunstancias la relación

$$\pi A_1 \equiv A_1'$$

puede escribirse

$$\pi A_1 \equiv A_1'$$

resulta que A_1, A_1' , son elementos homólogos en π ; luego, la [2] puede interpretarse diciendo: la ω hace corresponder a dos elementos homólogos en π , dos elementos también homólogos en π .

§ 4. — De la relación [2] sale

$$\pi \omega \equiv \omega \pi \quad [3]$$

$$\omega \equiv \pi \omega \pi^{-1} \quad [4]$$

La [3] nos dice: las proyectividades π, ω , son permutables: y la [4]: la ω es transformada en sí misma por la π .

Teniendo en cuenta que de verificarse la [2] resulta la [3], y recíprocamente de verificarse la [3] resulta la [2] y la [4], se tiene el enunciado siguiente: *Condición necesaria y suficiente para que dos proyectividades sobre una forma de 1ª especie, cada una de ellas transforme a la otra en sí misma, es que sean permutables.*

§ 5. — Supongamos que las proyectividades π, ω , no sean involutorias. Si siendo π hiperbólica, tenemos

$$\pi M \equiv M$$

$$\pi N \equiv N$$

debiendo la ω transformar un elemento unido de la π en un elemento unido de la π , deberá ser

$$\omega M \equiv M$$

En efecto, si fuese

$$\omega M \equiv N$$

sería también

$$\omega N \equiv M$$

pero entonces M, N , se corresponderían doblemente en ω que, contra lo supuesto, sería involutoria. Luego, debe ser

$$\omega M = M$$

$$\omega N = N$$

Es decir: ω será hiperbólica y admitirá los mismos elementos unidos que π .

Si fuese π parabólica, y tuviéramos

$$\pi M = M$$

supongamos que fuese

$$\omega M = M_1$$

es decir

$$M_1 = \omega M = \pi \omega \pi^{-1} M = \pi \omega M = \pi M_1$$

o sea

$$\pi M_1 = M_1$$

relación que, por hipótesis, en π sólo se verifica para $M \equiv M$; luego, será

$$\omega M = M$$

y la ω es parabólica como π , y admite el mismo elemento unido que la π .

Finalmente, si la π es elíptica, también tendrá que serlo ω , porque si no, por lo que antecede, la π sería parabólica o hiperbólica según lo fuese ω .

Podemos resumir este análisis diciendo: Dos proyectividades no involutorias, permutables, son contemporáneamente elípticas, parabólicas o hiperbólicas y, en estos dos últimos casos, admiten los mismos elementos unidos.

§ 6. — En toda involución hiperbólica sobre una forma de 1ª especie, existe siempre un par de elementos dobles, reales y distintos. Como estos elementos dividen armónicamente a cualquier par de elementos conjugados, se ve que dar los elementos dobles de una involución hiperbólica, es equivalente a dar la involución misma, y recíprocamente.

Podemos convenir en *identificar* el concepto de involución hiperbólica con el concepto de *par de elementos reales y distintos*, enten-

diendo que este par de elementos constituye los elementos dobles de la involución aludida.

En consecuencia, en toda proposición que se refiera a una involución hiperbólica, esta última denominación podrá ser sustituida por la expresión equivalente: *par de elementos reales y distintos*.

Extendiendo esta convención, hagamos ahora una convención análoga respecto de una involución elíptica. Como ésta no tiene elementos dobles, en el mismo sentido que los tiene una involución hiperbólica, *convengamos* en identificar el concepto de: *par de elementos dobles imaginarios* con el concepto de *involución elíptica*; conviniendo también en decir que: una involución elíptica tiene dos puntos (elementos) dobles imaginarios, o lo que es lo mismo, por convención: una involución elíptica tiene como elementos dobles imaginarios a la misma involución elíptica ($\equiv$ par de elementos dobles imaginarios).

Por ser estas definiciones recíprocas, se ve que puede escribirse a dos columnas enunciados equivalentes, según se utilice el concepto de involución o el de par de elementos, en la siguiente forma:

a) <i>Involución hiperbólica</i> es lo mismo que: <i>par de elementos reales</i> .	a') <i>Par de elementos reales</i> es lo mismo que: <i>involución hiperbólica</i> .
b) <i>Involución elíptica</i> es lo mismo que: <i>par de elementos imaginarios</i> .	b') <i>Par de elementos imaginarios</i> es lo mismo que: <i>involución elíptica</i> .
c) Una <i>involución elíptica</i> tiene como par de <i>elementos dobles imaginarios</i> , a la misma involución elíptica.	c') Un <i>par de elementos imaginarios</i> tiene como <i>involución elíptica</i> , al mismo par de elementos dobles imaginarios.
d) <i>Involución</i> (hiperbólica o elíptica).	d') <i>Par de elementos</i> (reales o imaginarios).

De acuerdo con las convenciones que anteceden, se podrá usar la expresión *par de elementos* en lugar de *involución*; mas cuando sea necesario especificar de qué especie de par de elementos se trata, se podrá completar diciendo: *par de elementos reales*, o bien *par de elementos imaginarios*. Con esta identificación del concepto de

par de elementos imaginarios con el concepto de involución elíptica, resulta en sustancia que aquella expresión no quiere decir sino esto: *involución elíptica*, resultando de aquí que el concepto: par de elementos imaginarios, es un ente geométrico real, en el mismo sentido que lo es la involución elíptica, con la cual se identifica.

Quedan, pues, justificadas, las definiciones siguientes:

a) Llamaremos *par de puntos imaginarios* sobre una puntual u , a toda involución elíptica de puntos, definida sobre u .

De la definición que antecede se deduce: todo par de puntos imaginarios, pertenece a una recta real.

b) Llamaremos *par de planos imaginarios* sobre un eje u , a toda involución elíptica de planos que admita como eje a la recta u .

De la definición que antecede se deduce: todo par de planos imaginarios, pertenece a una recta real.

c) En un haz de rayos $S\sigma$ (de centro S y plano σ), llamaremos *par de rectas imaginarias* a toda involución elíptica de rayos con centro en S y plano σ .

El par de rectas imaginarias así definido, se dirá que constituye un par de rectas imaginarias de 1ª especie, para diferenciarlo del llamado par de rectas imaginarias de 2ª especie, constituido este último por una involución elíptica entre las generatrices reales de un mismo sistema de una cuádrica reglada alabeada.

De lo que antecede resulta: todo par de rectas imaginarias de 1ª especie pertenece siempre a un punto real y a un plano real. Todo par de rectas imaginarias de 2ª especie no contiene ningún punto real, ni pertenece a ningún plano real.

§ 7.— Introducida por convención esta nueva especie geométrica de par de elementos (imaginarios), para poder utilizarlos en nuestra teoría sintética del imaginarismo, se hace necesario definir las relaciones que tales pares tengan entre sí, o con los pares reales.

Para encontrar estas relaciones, siguiendo un proceso análogo al que se sigue, por ejemplo, en análisis, cuando se amplía un campo numérico, *definiremos las relaciones existentes entre los pares imaginarios, de modo que sean ciertas cuando se trate de pares reales.*

Para ello, damos la siguiente

DEFINICIÓN. — Cuando el par de elementos reales (A, B) separe armónicamente al par de elementos reales (C, D) , diremos que ambos pares constituyen « dos pares reales armónicos ». También diremos que son armónicas dos involuciones hiperbólicas cuyos elementos dobles reales se separen armónicamente.

Dicho esto, consideramos:

a) Dos involuciones hiperbólicas cuyos elementos dobles (A, B) y (C, D) se separan armónicamente.

a') Dos pares de elementos reales (A, B) y (C, D) que constituyen dos pares reales armónicos.

Indicando con $\Omega \equiv \Omega [A, B]$ la involución hiperbólica cuyos elementos dobles reales sean A, B , podemos demostrar el siguiente

TEOREMA. —

a) Condición necesaria y suficiente para que las involuciones hiperbólicas $\Omega [A, B]$, $\Omega_1 [C, D]$ sean armónicas, es que las dos involuciones sean permutables.

a') Condición necesaria y suficiente para que los pares reales y distintos $[A, B]$, $[C, D]$ sean armónicos, es que las involuciones definidas por ellos sean permutables.

o teniendo en cuenta el teorema demostrado en (§ 3), también podemos enunciarlo así:

b) Condición necesaria y suficiente para que dos involuciones hiperbólicas $\Omega [A, B]$, $\Omega_1 [C, D]$ sean armónicas, es que cada una de ellas transforme a la otra en sí misma.

b') Condición necesaria y suficiente para que los pares reales y distintos $[A, B]$, $[C, D]$ sean armónicos, es que cada una de las involuciones por ellos definidas, transforme a la otra en sí misma.

Sea $(A B C D)$ un grupo armónico; $\Omega \equiv \Omega [A, B]$, la involución que admite A y B como elementos dobles reales y distintos; y aná-

logamente, $\Omega_1 \equiv \Omega_1 [C, D]$ la involución que admite a C, D , como elementos dobles.

Por ser el grupo $(A B C D)$ armónico, C y D serán conjugados en la involución Ω ; y del mismo modo, A, B serán conjugados en la involución Ω_1 y se tendrá:

$$\begin{aligned}\Omega [A, B] &= \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix} \\ \Omega_1 [C, D] &= \begin{pmatrix} C & D & A & B \\ C & D & B & A \end{pmatrix}\end{aligned}\quad [1]$$

Transformando la Ω_1 mediante la Ω , sale

$$\Omega_2 = \Omega \Omega_1 \Omega^{-1}$$

Es fácil ver que Ω_2 es una involución. Se tiene, en efecto

$$\begin{aligned}\Omega_2^2 &= (\Omega \Omega_1 \Omega^{-1})^2 = \Omega \Omega_1 \Omega^{-1} \cdot \Omega \Omega_1 \Omega^{-1} = \Omega \Omega_1 \Omega_1 \Omega^{-1} \\ &= \Omega \Omega_1^2 \Omega^{-1} = \Omega \Omega^{-1} = 1\end{aligned}$$

En segundo lugar, es fácil ver que será $\Omega_2 \equiv \Omega_1$. Se tiene, en efecto

$$\begin{aligned}\Omega_2 C &= \Omega \Omega_1 \Omega^{-1} C = \Omega \Omega_1 D = \Omega D = C \longrightarrow \Omega_2 C = C \\ \Omega_2 D &= \Omega \Omega_1 \Omega^{-1} D = \Omega \Omega_1 C = \Omega C = D \longrightarrow \Omega_2 D = D\end{aligned}$$

Luego, la involución Ω_2 , que tiene a C, D como elementos dobles, coincide con la involución Ω_1 , es decir

$$\Omega_2 = \Omega_1 = \Omega \Omega_1 \Omega^{-1} \quad [2]$$

Por tanto, Ω transforma a Ω_1 en sí misma, y recíprocamente; o también: las involuciones Ω, Ω_1 , son permutables.

Recíprocamente, si [2] se cumple o, lo que es lo mismo, $\Omega \Omega_1 \equiv \Omega_1 \Omega$ el grupo $(A B C D)$ es armónico.

Por ser Ω, Ω_1 permutables, Ω debe transformar a Ω_1 en sí misma, y a los dos elementos conjugados reunidos en C de la involución Ω_1 , debe hacer corresponder dos elementos conjugados en Ω_1 coincidentes, y como en Ω los únicos elementos unidos son A y B , deberá tenerse

$$\begin{aligned}\Omega C &= D \\ \Omega D &= C\end{aligned}$$

Pero entonces C, D son conjugados en Ω y en consecuencia el grupo $(A B C D)$ es armónico o, lo que es lo mismo, los pares $(A, B), (C, D)$ son dos pares reales armónicos.

El teorema que acaba de demostrarse nos dice en sustancia que: *propiedad característica de dos pares armónicos* es que las involuciones hiperbólicas por ellos definidas son permutables, y recíprocamente.

Apoyándonos en este resultado, podemos decir: dadas dos involuciones superpuestas sobre una forma fundamental de 1ª especie, diremos que son armónicas cuando sean permutables.

Utilicemos la propiedad característica de los pares armónicos reales para dar la siguiente

DEFINICIÓN. — *Dados sobre una forma de 1ª especie dos pares de elementos (reales o imaginarios), diremos que dichos pares son armónicos cuando sus involuciones relativas sean permutables. O lo que es lo mismo: Dos involuciones cualesquiera (no degeneradas) superpuestas son armónicas si son permutables.*

Mostraremos ahora el siguiente

TEOREMA. — *Condición necesaria y suficiente para que dos involuciones sean permutables, es que su producto sea una involución.*

Sean Ω, Ω_1 dos involuciones y supongamos tener

$$\Omega \cdot \Omega_1 = \Omega_1 \Omega$$

Recordemos que por ser Ω, Ω_1 involuciones, se tiene

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega^{-1} & \Omega^2 &= 1 \\ \Omega_1 &= \Omega_1^{-1} & \Omega_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

Dicho esto, pongamos

$$\pi = \Omega \Omega_1$$

de donde sale

$$\pi^2 = \Omega \Omega_1 \cdot \Omega \Omega_1 = \Omega^2 \cdot \Omega_1^2 = 1$$

Recíprocamente, si $\pi^2 = 1$, sale (multiplicando a la izquierda por π^{-1})

$$\pi = \pi^{-1}$$

o sea

$$\Omega \Omega_1 = (\Omega \Omega_1)^{-1} = \Omega^{-1} \Omega_1^{-1} = \Omega_1 \cdot \Omega$$

Luego, las involuciones son permutables.

Dada una involución

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & A' & B & B' & \dots \\ A'A & B'B & \dots \end{pmatrix}$$

una involución Ω_1 permutable con Ω quedará definida *asignando un par de elementos conjugados en Ω_1* . Tomemos, en efecto, como conjugados en Ω_1 , los elementos A y B ,

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} A & B & \dots \\ B & A & \dots \end{pmatrix}$$

Como la Ω , por hipótesis, debe ser permutable con Ω_1 , tiene que transformar dos elementos homólogos en Ω_1 en dos elementos, también homólogos, en la misma involución. Resulta que los elementos A' , B' , tales que

$$A' = \Omega A$$

$$B' = \Omega B$$

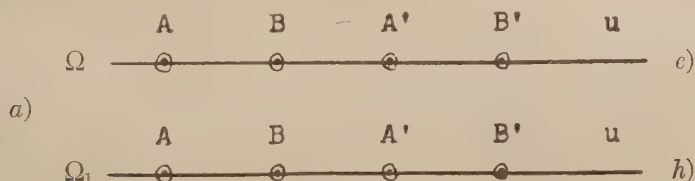
deben ser conjugados en Ω_1 y se tendrá que

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} A & B & A' & B' \\ B & A & B' & A' \end{pmatrix}$$

queda definida por dos pares conjugados.

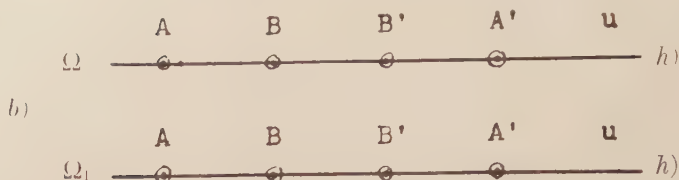
Pueden presentarse los siguientes casos:

a) La involución Ω dada en elíptica, es decir, el par de elementos B, B' separa al par de elementos A, A' .



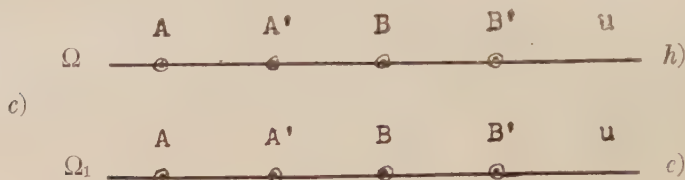
En ese caso, el par A, B , no separa al par A', B' , y la involución Ω_1 será hiperbólica.

b) La involución Ω es hiperbólica y el segmento finito BB' es interior al segmento finito AA' ; de otro modo, los pares A, A' ; B, B' no se separan.



Los pares $A, B; A', B'$ no se separan, y la involución Ω_1 será hiperbólica.

c) La involución Ω es hiperbólica y el segmento finito BB' es interior al segmento infinito AA' .



El par AB separa al par $A'B'$, y la involución Ω_1 será elíptica. Del anterior análisis resulta:

- | | |
|--|--|
| <p>1) Existen infinitas involuciones permutables, con una involución dada Ω. Toda involución Ω_1 permutable con Ω, queda definida asignando arbitrariamente un par de conjugados en Ω_1.</p> | <p>1') Existen infinitos pares armónicos con un par dado Ω. Todo par real armónico con el par Ω, queda definido asignando arbitrariamente elementos conjugados en la involución que define al par Ω.</p> |
| <p>2) Las involuciones elípticas admiten como involuciones permutables solamente involuciones hiperbólicas (caso a).</p> | <p>2') Los pares imaginarios sólo son armónicos con los pares reales (caso a).</p> |
| <p>3) Las involuciones hiperbólicas admiten como involuciones permutables tanto involuciones hiperbólicas (caso b) como involuciones elípticas (caso c).</p> | <p>3') Los pares reales son armónicos tanto con pares reales (caso b) como con pares imaginarios (caso c).</p> |

§ 8. — Estudiemos otra propiedad de:

- | | |
|---|--|
| <p>α) Las involuciones hiperbólicas, a fin de poder luego extenderlas a las involuciones elípticas.</p> | <p>α') Los pares reales, a fin de poder luego extenderlas a los pares imaginarios.</p> |
|---|--|

Se ha visto antes que si dos involuciones hiperbólicas son armónicas, los elementos dobles de cada una de ellas son pares conjugados en la otra, y recíprocamente. O bien, sustituyendo las involuciones por los pares reales, si dos pares son armónicos, cada par constituye un par de elementos conjugados en la involución relativa al otro par, esto es, cada par pertenece a la involución definida por el otro. Por analogía con lo que antecede, daremos la siguiente

DEFINICIÓN. — *Diremos que un par cualquiera de elementos (reales o imaginarios) pertenece a una involución Ω , cuando la involución relativa a dicho par sea armónica con el par definido por Ω ; o también, cuando la involución Ω sea permutable con la involución definida por el par (real o imaginario).*

Como, según se vió más arriba, dos involuciones elípticas no son nunca permutables, para que la definición anterior pueda ser utilizada, se hace necesario demostrar el siguiente

TEOREMA. — *Si dos involuciones superpuestas, una hiperbólica y otra elíptica son permutables, los elementos dobles de la involución hiperbólica son elementos conjugados en la involución elíptica; o también: si dos pares, uno real y otro imaginario, son armónicos, el par real pertenece a la involución definida por el par imaginario. En este caso también diremos que los elementos dobles imaginarios son elementos conjugados en la involución hiperbólica.*

Sea Ω una involución elíptica y $\Omega_1 \equiv \Omega_1 [A, B]$ la involución hiperbólica, siendo A y B elementos dobles de Ω_1 .

Supongamos tener

$$\Omega \Omega_1 \equiv \Omega_1 \Omega$$

Si en la involución Ω el elemento A tiene como conjugado el elemento A_1 , será

$$\Omega A \equiv A_1 \quad [1]$$

Por ser permutables, Ω y Ω_1 , se tiene

$$\Omega = \Omega_1 \Omega \Omega^{-1}$$

y la [1] se podrá escribir

$$A_1 = \Omega A = \Omega_1 \Omega \Omega_1^{-1}, A = \Omega_1 \Omega A = \Omega_1 A_1$$

es decir

$$\Omega_1 A_1 = A_1.$$

Pero en Ω_1 , esta última relación sólo se verifica para A o para B ; luego, tiene que ser

$$A_1 = A$$

o

$$A_1 = B$$

Si fuese $A_1 = A$, se tendría en [1]

$$\Omega A = A$$

que no es posible por ser Ω elíptica; luego, debe ser $A_1 = B$, o sea

$$\Omega A = B$$

pero entonces A y B son conjugados en Ω .

Recíprocamente, sea la involución hiperbólica

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} AB & \dots \\ AB & \dots \end{pmatrix}$$

y la involución elíptica

$$\Omega = \begin{pmatrix} AB & \dots \\ BA & \dots \end{pmatrix}$$

que admite, como elementos conjugados, los elementos dobles de Ω_1 . Digo que debe ser

$$\Omega_1 \Omega = \Omega \Omega_1$$

Si ponemos

$$\Omega_2 = \Omega \Omega_1 \Omega^{-1}$$

[2]

Ω_2 es involuntaria, y resulta

$$\Omega_2 A \equiv \Omega \Omega_1 \Omega^{-1} A \equiv \Omega \Omega_1 B \equiv \Omega B \equiv A \longrightarrow \Omega_2 A \equiv A$$

$$\Omega_2 B \equiv \Omega \Omega_1 \Omega^{-1} B \equiv \Omega \Omega_1 A \equiv \Omega A \equiv B \longrightarrow \Omega_2 B \equiv B$$

Luego, la involución Ω_2 , que admite los mismos elementos dobles que Ω_1 , coincide con ella, es decir, $\Omega_2 \equiv \Omega_1$. Pero entonces de [2] resulta que Ω y Ω_1 son permutables o, lo que es lo mismo, el par definido por Ω es armónico al par definido por Ω_1 .

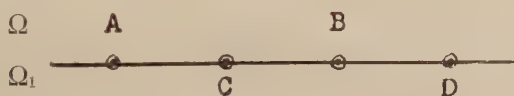
Si se tiene en cuenta la definición dada anteriormente, así como los teoremas relativos a la permutabilidad de las involuciones, del teorema que acaba de demostrarse resulta:

1º) Si Ω es elíptica, por no ser permutable con ninguna involución elíptica, podemos decir: la involución Ω sólo contiene pares reales.

2º) Si Ω es hiperbólica, por ser permutable con involuciones tanto hiperbólicas como elípticas, podemos decir: toda involución hiperbólica contiene infinitos pares reales e infinitos pares imaginarios. En este último caso, los elementos dobles de la involución hiperbólica son elementos conjugados en la involución elíptica.

§ 9.— Consideremos dos involuciones hiperbólicas superpuestas:

$$\Omega \equiv \Omega [A, B], \quad \Omega_1 \equiv \Omega_1 [C, D]$$



Si los pares (A, B) , (C, D) se separan, podemos considerar la involución

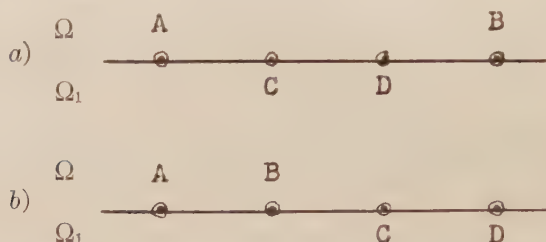
$$\Omega_2 \equiv \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

con lo que la Ω_2 queda perfectamente definida, y será elíptica, por separarse sus pares de conjugados.

Por ser A, B elementos dobles de Ω , conjugados en Ω_2 , los elementos dobles imaginarios de Ω_2 pertenecen a Ω ; por la misma ra-

zón, pertenecen a Ω_1 . En resumen, se tiene: *Dos involuciones hiperbólicas, cuyos elementos dobles se separan, admiten un solo par de elementos (imaginarios) comunes; o también: dos pares reales que se separan admiten un solo par imaginario armónico con ellos.*

Si los elementos dobles de las involuciones hiperbólicas $\Omega \equiv \Omega [A, B]$, $\Omega_1 \equiv \Omega_1 [C, D]$, no se separan, puede suceder: a) que el par (C, D) pertenezca al segmento finito AB ; b) que el par (C, D) pertenezca al segmento infinito AB .



En los dos casos, la involución

$$\Omega_2 \equiv \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$$

armónica con ambas, siempre es hiperbólica, y sus elementos dobles son el par real común a Ω y Ω_1 .

Por lo tanto, como no existe ninguna involución elíptica que sea permutable contemporáneamente con Ω , Ω_1 , se puede decir: *Dos involuciones hiperbólicas superpuestas, cuyos elementos dobles no se separen, no admiten ningún par de elementos imaginarios comunes.*

Esta proposición permite ahora enunciar en forma general la proposición (véase Enriques [8], pág. 86):

En una forma de 1ª especie, existe siempre un par (real o imaginario) que separe armónicamente a dos pares dados.

§ 10. — Se ha visto que dada una involución, elíptica o hiperbólica, existen siempre infinitas involuciones que le sean permutables. Se trata, mientras tanto, de investigar si existe una involución per-

mutable con una proyectividad *no involuntaria* dada sobre una forma de 1ª especie, a cuyo fin demostraremos el siguiente

TEOREMA. — [Schroeter, 1873] (*) - *Dada sobre una forma de 1ª especie una proyectividad π no involuntaria, existe una determinada involución (unida) permutable con π , la cual es hiperbólica, elíptica o parabólica según lo sea π .*

Sea π una proyectividad *no involutória*, dada sobre una forma de 1ª especie. Supongamos tener

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & A_1B_1 \\ A'B'A & B & \end{pmatrix} \quad [1]$$

Quiere decir que A' y B' son homólogos de A y B en π y A_1 y B_1 homólogos de A y B en π^{-1} . De [1] cale

$$AB A_1B_1 \rhd A'B'AB \quad [2]$$

y por un teorema conocido (véase [8], pág. 130)

$$AB A_1B_1 \rhd ABA'B' \quad [3]$$

y recordando el teorema (véase [8], pág. 122)

$$ABA_1A' \rhd ABB_1B' \quad [4]$$

Supongamos la existencia de una proyectividad involutória Ω , permutable con π ; entonces se tiene: si Ω es hiperbólica, la proyectividad π debe transformar en sí mismo cada elemento unido de Ω , es decir, si un elemento no es unido en π , tampoco lo es en Ω .

Consideremos un elemento A , no unido en π y, análogamente, sea B otro elemento, tampoco unido en π , y distinto de A . Formemos la involución Ω tomando en ella A y B como elementos conjugados, y tendremos

$$\Omega = \begin{pmatrix} AB & \dots \\ BA & \dots \end{pmatrix}$$

(*) Journal de Crelle. Vol. 17, 1873.

Como por hipótesis debe ser $\pi \Omega \equiv \Omega \pi$ sale, recordando que $\pi \pi^{-1} = 1$

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega (\pi \pi^{-1}) = (\Omega \pi) \pi^{-1} = \pi \Omega \pi^{-1} \\ \Omega &= (\pi \pi^{-1} \Omega) = \pi^{-1} (\pi \Omega) = \pi^{-1} \Omega \pi\end{aligned}$$

lo cual significa que tanto π como π^{-1} transforman a la Ω en sí misma; resulta que los elementos A' , B' , transformados de A y B en π , deben ser conjugados en Ω , y del mismo modo los elementos A_1 , B_1 transformados de A y B en la proyectividad π^{-1} , también deben ser conjugados en Ω . Entonces sale

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} AB & A'B' & A_1B_1 \\ BA & B'A' & B_1A_1 \end{pmatrix} \quad [5]$$

y la involución Ω queda definida.

De [5] sale

$$AB B_1B' \top BA A_1A' \quad [6]$$

y comparando con [4], resulta

$$AB A_1A' \top BA A_1A' \quad [7]$$

relación que nos dice (véase [8], pág. 119) que el grupo $(BA A_1A')$ es armónico o, de otro modo: el elemento B , conjugado de A en Ω , tiene que ser conjugado armónico de A respecto de los elementos que corresponden a éste en la proyectividad π y en la π^{-1} .

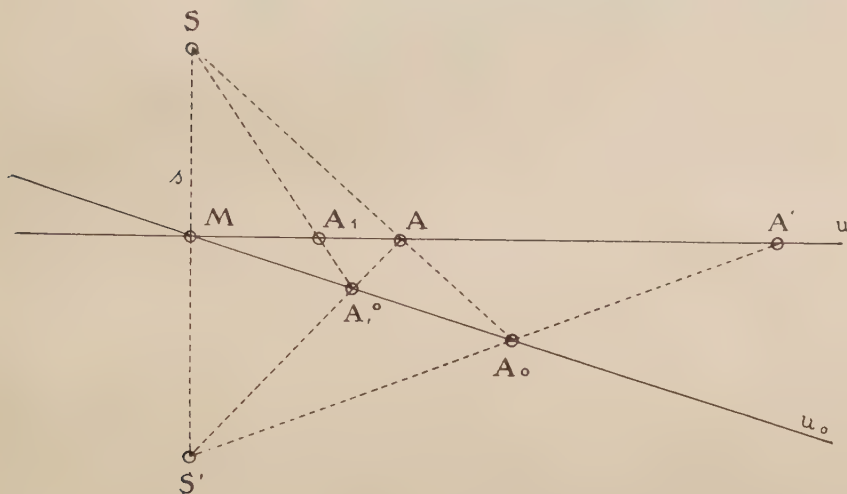
Antes de demostrar la proposición recíproca, conviene hacer la siguiente observación: si π fuese una proyectividad parabólica, no existe una involución (no degenerada) que sea permutable con π .

Sea, en efecto, π una proyectividad parabólica que admita al elemento M como elemento unido; y del mismo modo, sean A , A' un par de elementos homólogos en π .

Tracemos por M una recta arbitraria s , distinta de u , y sobre ella tomemos dos puntos distintos S , S' y pongamos $A_0 \equiv SA \cdot S'A'$ y enseguida: $u_0 \equiv A_0M$. Resulta de aquí que los haces de rayos $S(M, A, A_1)$, $S(M, A', A)$ son perspectivas, por proyectar la pun-

tual u_0 . Cortando los haces S, S' con u , queda sobre ésta definida la proyectividad parabólica:

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} M & M & A & A_1 \\ M & M & A' & A \end{pmatrix}$$



En π , al elemento A le corresponde A' y al mismo elemento A le corresponde A_1 en la proyectividad π^{-1} . Si consideramos el cuadrivértice $S S' A_0 A_1^0$, sale

$$A \equiv S A_0 \cdot S' A_1^0 ; M \equiv S S' \cdot A_0 A_1^0 ; A' \equiv S' A_0 \cdot u ; A_1 \equiv S A_1^0 \cdot u$$

y esto nos dice que el grupo $(M A A' A_1)$ es armónico; cualquiera que sea el elemento A en la proyectividad π , siempre le corresponde el mismo elemento M como conjugado armónico respecto de los homólogos de A en π y en π^{-1} . En consecuencia, construyendo de acuerdo con la regla enunciada por el teorema que antecede, la involución permutable con la proyectividad π , se obtiene una involución parabólica (degenerada) en que a cualquier elemento de la forma, corresponde siempre el mismo elemento M .

Demostremos la recíproca del teorema anterior, a saber: que si π es una proyectividad no involutoria *no parabólica* y construímos una involución según la primera parte del teorema, dicha involución será permutable con π .

Sea pues π definida por (1), donde A es un elemento no unido para π , y determinemos el elemento B , conjugado armónico de A respecto de A' y A_1 ; por ser π una proyectividad no parabólica B , será un elemento no unido para π .

Por la forma en que hemos determinado B , se tiene que el grupo $(B A A' A_1)$ es armónico y podremos escribir

$$A B A_1 A' \rhd B A A_1 A' \quad [8]$$

Pero de la [1] salen las relaciones [2], [3], [4]. Comparando [4] con [8], sale

$$A B B_1 B' \rhd B A A_1 A' \quad [9]$$

relación que nos dice: existe una involución

$$\Omega = \begin{pmatrix} A B B_1 B' \\ B A A_1 A' \end{pmatrix} \quad [x]$$

en la que los pares de elementos $(A B)$, $(A' B')$, $(A_1 B_1)$ son pares de conjugados. Se tiene finalmente

$$\Omega \pi \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} B A A_1 \\ B' A' A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A B A_1 \\ A' B' A \end{pmatrix} = \pi$$

Luego, la involución Ω transforma a la π en sí misma o, de otro modo: π y Ω son permutables. La ley según la cual se construyó la involución Ω , permutable con π , nos dice que Ω es única y bien determinada cuando se conoce la proyectividad π , no involutoria.

Lo que antecede se puede resumir así: *Si se da sobre una forma de 1ª especie una proyectividad no involutoria, existe una involución permutable con ella, y esta involución es única.*

Si π fuese una proyectividad involutoria, se tendría

$$\pi A = A'$$

$$\pi^{-1} A = A_1 = A'$$

y en este caso el conjugado B de A en la involución Ω , coincidiría con $A' = A_1$; luego, la involución Ω sería la misma involución π .

Mas, como es sabido, en este caso existen infinitas involuciones permutables con π . La involución Ω (que en el caso de ser π involutoria coincide consigo misma con respecto a π) recibe el nombre de *involución unida* de la π .

Cuando π no es involutoria la ley que permite construir su involución unida Ω nos dice que es única. Cuando π es involutoria, la ley que permite construir Ω conduce a la relación $\Omega \equiv \pi$. Pero como entonces existen infinitas involuciones permutables con π , no daremos a éstas el nombre de involución unida, sino a la misma involución $\pi \equiv \Omega$.

§ 11. — Si la proyectividad π , no involutoria, es hiperbólica, y M, N , son sus elementos unidos, se tendrá

$$\pi M \equiv M$$

$$\pi N \equiv N$$

y en consecuencia, transformará en sí misma a la involución

$$\Omega \equiv \Omega [M, N]$$

Luego, la Ω no es sino la involución unida de la π . La involución unida de la π admite, pues, como elementos dobles, los elementos unidos de π .

Recíprocamente, si la involución hiperbólica Ω tiene a M, N como elementos dobles, es decir

$$\Omega \equiv \Omega [M, N]$$

supongamos que fuese

$$\pi M \equiv M_1$$

o también

$$\Omega \pi M \equiv \Omega M_1 \quad \therefore \quad \Omega M \equiv M_1$$

y como esta relación sólo se verifica en Ω para M o para N , deber ser: o bien $M_1 \equiv M$, o bien $M_1 \equiv N$. Pero si fuese

$$\pi M \equiv N$$

por ser π permutable con Ω , debe transformar un elemento doble de Ω en un elemento, también doble, en Ω , y en ese caso se tendrá

$$\pi N = M$$

Pero entonces π , contra lo supuesto, sería involutoria. Deberá tenerse pues

$$\pi M = M$$

$$\pi N = N$$

o sea que M y N serán elementos unidos en π .

Si π fuese parabólica, se ha visto que Ω es parabólica y admite como elemento unido el elemento unido de π .

Finalmente, si π es elíptica, también lo es Ω , y recíprocamente.

Resumiendo, se tiene en conclusión respecto de la proyectividad π no involutoria:

- 1º) Si π es hiperbólica, también lo es Ω , y admite los mismos elementos unidos.
- 2º) Si π es elíptica, también lo es Ω .
- 3º) Si π es parabólica, también lo es Ω , y admite el mismo elemento unido.

La existencia de la involución unida, así como sus propiedades respecto de π , nos permiten definir los elementos unidos de una proyectividad entre dos formas superpuestas de 1ª especie, mediante la siguiente

DEFINICIÓN. — *Llamaremos elementos unidos de una proyectividad entre dos formas superpuestas de 1ª especie, a los elementos dobles de su involución unida.*

Si la proyectividad π es hiperbólica o parabólica, la definición enuncia que los elementos dobles reales de Ω coinciden con los elementos unidos de π . Si π es elíptica, quedan definidos los elementos unidos imaginarios de la misma π .

Con la definición que antecede, resulta que puede enunciarse el

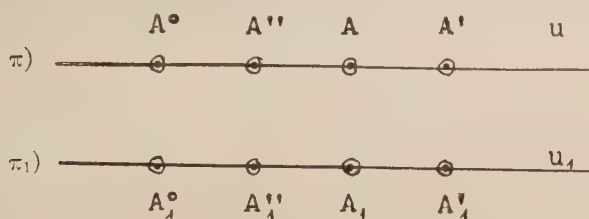
TEOREMA. — *Toda proyectividad entre dos formas superpuestas de 1ª especie, admite siempre un par de elementos unidos que serán*

reales y distintos, reales y coincidentes o imaginarios (conjugados), según sea la involución unida de la proyectividad.

§ 12. — Sea π una proyectividad no involutoria sobre una forma de 1ª especie u , y sea Ω su involución unida. Se tendrá

$$\Omega\pi \equiv \pi\Omega.$$

Entre las formas u , u_1 , pongamos una proyectividad π' .



Buscando las transformadas de Ω y de π mediante π' , se tiene

$$\pi_1 \equiv \pi' \pi \pi'^{-1}$$

$$\Omega_1 \equiv \pi' \Omega \pi'^{-1}$$

De aquí resulta

$$\begin{aligned} \pi_1 \Omega_1 &\equiv (\pi' \pi \pi'^{-1}) (\pi' \Omega \pi'^{-1}) \equiv \pi' \pi \Omega \pi'^{-1} \equiv \pi' \Omega \pi \pi'^{-1} \\ &\equiv (\pi' \Omega \pi'^{-1}) (\pi' \pi \pi'^{-1}) \equiv \Omega_1 \pi_1 \end{aligned}$$

o sea

$$\pi_1 \Omega_1 \equiv \Omega_1 \pi_1$$

En segundo lugar, si se tiene

$$\pi A \equiv A'$$

$$\pi^{-1} A \equiv A''$$

y determinamos A^0 de modo que el grupo $(A^0 A A' A'')$ sea armónico, A , A^0 serán conjugados en Ω , involución unida de π .

Supongamos tener en π' :

$$A^0 A A' A'' \propto A_1^0 A_1 A_1' A_1''$$

luego, el grupo $(A_1^0 A_1 A_1' A_1'')$ también será armónico y para la proyectividad

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} A_1 A_1'' & \dots \\ A_1' A_1 & \dots \end{pmatrix}$$

transformada de la π mediante la π' , los elementos A_1^0, A_1 , serán conjugados en la involución Ω_1 , unida para π_1 por ser A_1^0 conjugado armónico de A_1 respecto de A_1', A_1'' .

De lo anterior, resulta el siguiente enunciado: *Si Ω es la involución unida de π , la transformada proyectiva Ω_1 de Ω es la involución unida de la transformada proyectiva π_1 de π .*

En otros términos: una proyectividad π' real entre dos formas de 1ª especie u, u_1 ; hace corresponder a un par de elementos imaginarios en u , un par de elementos imaginarios en u_1 ; o más brevemente: a un par de elementos dobles (reales o imaginarios) de u , un par de elementos de idéntica naturaleza en u_1 .

§ 13. — La introducción del concepto de involución unida es de gran importancia en el estudio de la proyectividad pues, como veremos, por su intermedio es posible enunciar múltiples proposiciones de un modo completamente general, tratando en igual forma los pares de elementos, ya sean reales, ya imaginarios, consiguiéndose así una visión uniforme respecto de ciertas clases de elementos, reales como imaginarios.

Algunos ejemplos ilustrarán con más precisión lo que acaba de afirmarse. Como es sabido, una proyectividad entre dos formas de 1ª especie queda determinada y es única, cuando se dan tres pares reales de elementos homólogos. En particular, si las formas son superpuestas y nos damos un par de elementos unidos reales y un par de elementos homólogos, la proyectividad queda bien determinada.

Podemos ver ahora que *una proyectividad entre dos formas superpuestas queda determinada y es única si nos damos un par de elementos homólogos reales y un par de elementos unidos imaginarios.*

Consideremos, por ejemplo, dos puntuales superpuestas. Darse un par de elementos unidos imaginarios, significa darse una invo-

lución elíptica sobre una forma de 1ª especie. Esta involución es unida para la proyectividad.

Sea pues π la proyectividad buscada, y sea en ella A, A' un par de elementos homólogos; se tendrá

$$\pi = \begin{pmatrix} A & \dots & \\ A' & \dots & \end{pmatrix} \quad [1]$$

Si indicamos con Ω la involución dada, unida para π , que define los puntos unidos imaginarios en esta proyectividad, por ser conocida Ω , es posible determinar en ella los conjugados de A y A' . Sea pues

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & A_1 & A' & A_1' \\ A_1 A & A_1' A' & & \end{pmatrix}$$

Si es además

$$\pi^{-1}A = A''$$

o sea

$$\pi A'' = A \quad [2]$$

el elemento A'' quedará determinado teniendo en cuenta que por ser A_1 conjugado de A en Ω , el grupo $(A_1 A A' A'')$ debe ser armónico y en este grupo son conocidos A_1, A, A' . Por otra parte, Ω debe hacer corresponder a dos elementos homólogos en π , dos elementos también homólogos en la misma proyectividad. Como en Ω , a los elementos A_1, A_1' , corresponden A, A' , ordenadamente resulta que será

$$\pi A_1 = A_1'$$

Teniendo en cuenta esta relación, así como [1] y [2], cale finalmente

$$\pi = \begin{pmatrix} A & A'' & A_1 \\ A' & A & A_1' \end{pmatrix}$$

y la proyectividad π queda perfectamente definida. Que esta proyectividad, recíprocamente, satisface a las condiciones impuestas, resulta del hecho que por ser A_1 conjugado armónico de A respecto de A' y A'' , el par A, A_1 debe ser conjugado en la involución

unida de π , y como en π los elementos A, A_1 tienen respectivamente como homólogos los elementos A', A_1' , estos elementos serán conjugados en Ω , resultando en consecuencia

$$\Omega = \begin{pmatrix} A & A_1 & A' & A_1' \\ A_1 A & A_1' A' \end{pmatrix}$$

como involución unida de la π .

El resultado que antecede nos autoriza a formular el siguiente enunciado, en forma general: *una proyectividad entre dos formas fundamentales de 1ª especie queda determinada si se da: un par de elementos homólogos reales y un par de elementos unidos (reales y distintos, o reales y coincidentes, o imaginarios).*

Si en la construcción que antecede dejamos fija la involución Ω y variamos arbitrariamente el par de elementos homólogos A, A' , se tendrá infinitas proyectividades elípticas que admiten a Ω como involución unida; resultado que puede enunciarse: existen infinitas proyectividades elípticas no involutorias que admiten un par de elementos imaginarios dados como elementos unidos; o también: una involución elíptica es permutable con infinitas proyectividades elípticas no involutorias.

§ 14. — Como es sabido, en una proyectividad π hiperbólica, entre dos formas de 1ª especie, con elementos unidos M, N y para la cual A, A' , lo mismo que B, B' son pares de elementos homólogos, de la relación

$$M N A B \asymp M N A' B'$$

se deduce que vale esta otra

$$M N A B \asymp N M B' A' \quad [1]$$

o sea la existencia de una involución en que son conjugados los pares $(M N)$, $(A B')$, $(A' B)$.

Veamos cómo esta propiedad puede extenderse al caso de que los elementos unidos de la proyectividad fuesen imaginarios. Ahora bien, si conocemos la involución (elíptica) Ω , unida para π , es posible hallar las infinitas proyectividades que admiten a Ω como involución unida sin más que fijar un par de elementos homólogos

en la proyectividad buscada. Del mismo modo, es posible encontrar las infinitas involuciones que son permutables con Ω .

Pero podemos construir, como se verá enseguida, todas las involuciones permutables con Ω sin conocer ésta, cuando Ω sea la involución unida de una proyectividad dada π , no involutoria. Para ello, demos previamente la

DEFINICIÓN. — *Diremos que una involución Ω_p es armónica con una proyectividad dada π , cuando dicha involución sea armónica con la involución Ω , unida para π .*

Sea la proyectividad

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$$

y consideramos la involución

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} A & B' & A'B \\ B'A & B & A' \end{pmatrix}$$

Sea D' el conjugado de C en Ω_p , es decir

$$\Omega_p C \equiv D'.$$

Si determinamos en π el elemento D tal que

$$\pi D \equiv D'$$

se tendrá

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}.$$

De aquí sale

$$A B C D \propto A' B' C' D' \propto B' A' D' C'$$

Existe, así, una proyectividad π_1 donde es

$$\pi_1 \equiv \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B' & A' & D' & C' \end{pmatrix}.$$

Como la Ω_p y la π_1 tienen comunes los pares (AB') , (BA') , (CD') , resultará ser

$$\pi_1 \equiv \Omega_p$$

y como en π_1 , D , C' , son homólogos, estos elementos serán conjugados en Ω_p , luego sale finalmente

$$\Omega_p = \begin{pmatrix} A & B' & B & A' & C & D' & C' & D \\ B' & A & A' & B & D' & C & D & C' \end{pmatrix}.$$

Mediante Ω_p , se tiene

$$\Omega_p \pi \Omega_p^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' & C' \\ A & B & C \end{pmatrix} = \pi^{-1}$$

y esto significa decir que la Ω_p transforma a la π en su inversa π^{-1} .

Si recordamos que tanto la π como la π^{-1} admiten la misma involución unida, resulta que la Ω_p transforma en sí misma la involución Ω , unida para π .

Para todo par análogo al par (AB') de la proyectividad π , se puede construir una involución bien determinada Ω_p , que sea armónica con Ω , y como toda involución que deba ser armónica con la involución unida de π , queda definida fijando un par de elementos conjugados, resulta que las involuciones del tipo Ω_p son todas involuciones armónicas con Ω .

De la relación

$$\Omega_p \cdot \pi \Omega_p^{-1} = \pi^{-1}$$

sale

$$\pi \Omega_p^{-1} = \Omega_p^{-1} \pi^{-1}$$

y teniendo en cuenta que $\Omega_p = \Omega_p^{-1}$ por ser involuntaria, se tendrá también

$$\pi \Omega_p^{-1} = \Omega_p \pi^{-1} \quad [i]$$

Si ponemos

$$J = \pi \Omega_p^{-1}$$

sale

$$J^{-1} = \Omega_p \cdot \pi^{-1}$$

La [i] nos dice que el producto $\pi \Omega_p^{-1}$ es una involución, por coincidir con su inversa.

Si dadas dos proyectividades π_1, π_2 , decimos que son armónicas cuando se tiene

$$\pi_1 \pi_2^{-1} = \pi_2 \pi_1^{-1}$$

o sea cuando el producto de una de ellas por la inversa de la otra en una involución, podemos decir que π es armónica con Ω_p .

Si dada la proyectividad

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & C & \dots \\ A' & B' & C' & \dots \end{pmatrix}$$

no involutoria, llamamos *pares asociados* a todos los pares del tipo $(A B')$, $(A' B)$, podemos resumir lo que antecede diciendo: *Todas las involuciones Ω_p , armónicas con π , se construyen tomando como dos pares conjugados en Ω_p un par cualquiera de elementos asociados en π .*

Decir que las involuciones Ω_p son armónicas con la involución Ω , es lo mismo que decir que los elementos dobles de Ω pertenecen a Ω_p ; y como Ω , por ser unida, define los elementos unidos de π , pertenecen a todas las involuciones del tipo Ω_p .

Si la involución Ω es hiperbólica, sale la relación [1]; si Ω es elíptica, el teorema dice que la relación [1] sigue valiendo aún en el caso de que los elementos unidos de π sean imaginarios.

§ 15. — Veamos todavía cómo puede extenderse el concepto de grupo proyectivo al caso en que éste contenga pares de elementos imaginarios. Para ello, demos la siguiente

DEFINICIÓN. — *Diremos que dos grupos de elementos son proyectivos, cuando existe una proyectividad que transforme a uno de los grupos en el otro.*

Demostremos el

TEOREMA. — *En una proyectividad cualquiera, el grupo formado por el par de elementos unidos y un par de elementos correspondientes cualquiera, es proyectivo con el grupo formado por los mismos elementos unidos y otro cualquiera de elementos correspondientes.*

Observemos primero que si π, π_1 , son dos proyectividades no involutorias, permutables, admiten la misma involución unida. En

efecto, debiendo π_1 transformar a π en sí misma, deberá transformar en sí misma la involución unida de la π , y en consecuencia π_1 admitirá la misma involución unida, o sea: dos proyectividades permutables que no sean involutorias, admiten la misma involución unida.

Recíprocamente, dos proyectividades que admitan la misma involución unida, son permutables.

Si A es un elemento cualquiera, eupongamos tener

$$\pi A = A'$$

$$\pi_1 A = B$$

Llamemos B' al homólogo de B en π y B_1 al homólogo de A' en π_1 ; se tendrá

$$\pi = \begin{pmatrix} A & B & \dots & \dots \\ A' & B' & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} A & A' & \dots & \dots \\ B & B_1 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Sea Ω la involución unida común a π y π_1 . Las involuciones armónicas con π , es decir, permutables con Ω , son del tipo

$$\Omega_p = \begin{pmatrix} A & B' & A' & B \\ B' & A & B & A' \end{pmatrix}$$

y las involuciones armónicas con π_1 , y por lo tanto también permutables con Ω , serán del tipo

$$\Omega_{p_1} = \begin{pmatrix} A & B_1 & A' & B \\ B_1 & A & B & A' \end{pmatrix}$$

Como las involuciones Ω_p, Ω_{p_1} , son permutables con Ω y admiten el par $(A'B)$ de conjugados comunes, será $\Omega_p \equiv \Omega_{p_1}$ y en consecuencia $B_1 \equiv B'$; luego, se tendrá en π_1

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} A & A' & \dots & \dots \\ B & B' & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Pero entonces la π_1 transforma en par cualquiera A, A' de elementos homólogos en π , en el par B, B' , que también son homólo-

gos en π ; por lo tanto, la π_1 transforma a la π en sí misma, y se tiene

$$\pi \pi_1 \equiv \pi_1 \pi.$$

Si ahora se considera en π el grupo formado por los elementos A, A' y el par de elementos unidos definidos por Ω , resulta que π_1 lo transforma en el grupo B, B' ; Ω ; luego, según la definición arriba enunciada, el grupo $(A, A'), \Omega$, es proyectivo con el grupo $(B, B'), \Omega$.

Si Ω es hiperbólica y M, N sus elementos dobles, se tiene la bien conocida relación

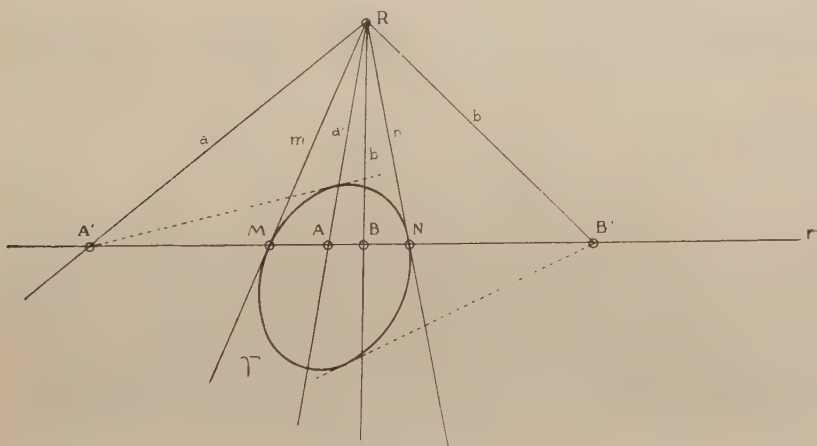
$$M N A A' \propto M N B B'$$

que resulta de la existencia de la proyectividad

$$\pi = \begin{pmatrix} M N A B \\ M N A' B' \end{pmatrix}.$$

Si Ω es elíptica, el teorema queda extendido al caso en que los elementos unidos sean imaginarios.

§ 16.—Para terminar con nuestra nota hagamos todavía una aplicación de la involución unida a la intersección de una recta con una cónica y a la extensión del teorema de Desargues, relativo a un cuadrángulo inscripto en una cónica.



Previamente, recordemos lo que sigue: consideremos una cónica Γ , y sea R un punto de su plano, exterior a ella.

Si por R trazamos las tangentes m, n a la cónica, la recta $r \equiv MN$ será la polar de R respecto de la cónica Γ .

A toda recta a , que pasa por R , hagamos corresponder la recta a' que pasa por R y es polar conjugada de a . Con centro en R , quedará definida una involución de rayos conjugados

$$R \equiv \begin{pmatrix} a & a' & b & b' & \dots \\ a'a & b'b & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Esta involución se dice que está subordinada a la polaridad definida por Γ . Cortando la involución de rayos R con la recta r , polar de R , quedará definida la involución

$$r \equiv \begin{pmatrix} A & A' & B & B' & \dots \\ A'A & B'B & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

de puntos conjugados; también se dice que la involución definida sobre r está subordinada a la polaridad que tiene a Γ como cónica directriz.

Los puntos M, N , intersecciones de r con Γ , son los puntos dobles de la involución. Cuando r sea tangente a Γ , queda definida sobre r una involución parabólica (degenerada), que admite como único punto doble el punto de tangencia.

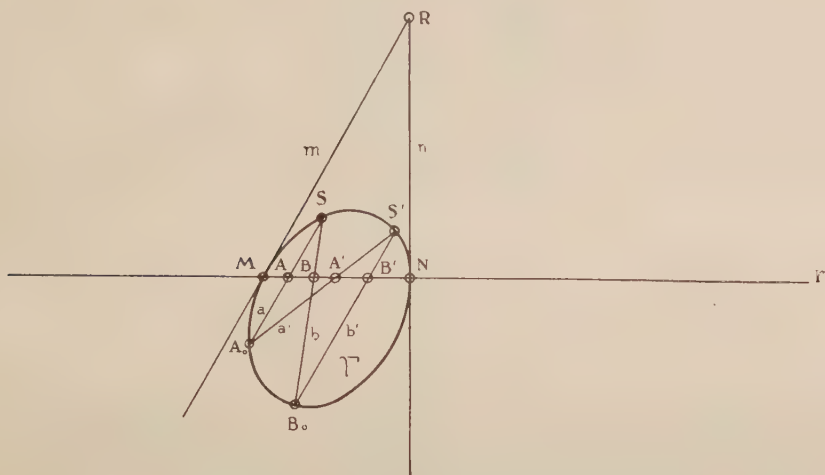
Finalmente, cuando r sea no secante a la cónica, quedará definida sobre r una involución elíptica; esta involución definirá un par de puntos dobles imaginarios. Por extensión de los casos anteriores, parecerá natural definir como intersecciones de r con Γ , a los puntos dobles imaginarios de la involución elíptica, que la polaridad definida por Γ subordina sobre r .

Mas para que esta definición quede justificada, se hace necesaria la observación siguiente:

Volvamos a considerar nuestra cónica Γ . Sea R un punto de su plano, exterior a Γ , y r la polar de R .

Los haces de rayos obtenidos proyectando desde dos puntos de la cónica S, S' un punto variable A_0 de la cónica, serán proyectivos.

Cortando dichos haces de rayos con la recta r , se tiene sobre esta recta una proyectividad que admite siempre como puntos unidos los



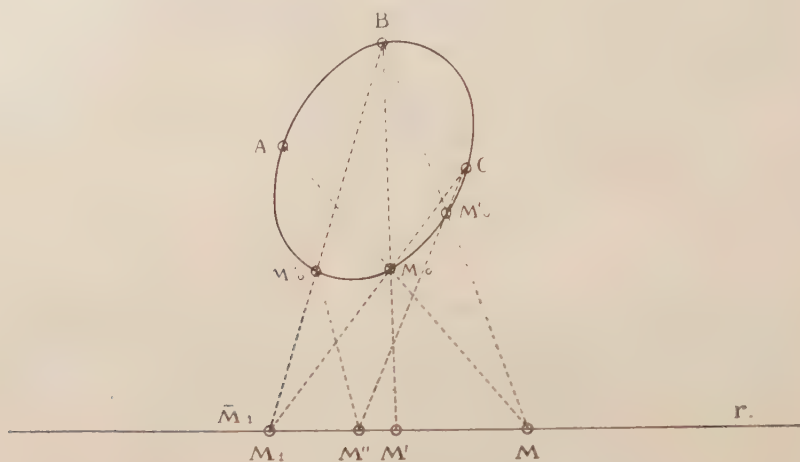
puntos M, N , y esto cualesquiera que sean los centros S y S' elegidos sobre la cónica.

Esto es lo mismo que decir que las infinitas proyectividades obtenidas sobre r variando los centros de proyección S, S' , admiten como involución unida la involución de puntos conjugados que la Γ subordina sobre r ; de donde resulta que todas dichas proyectividades son permutables, por admitir la misma involución unida. Cuando r sea tangente a la cónica, la involución unida será parabólica (degenerada).

La definición anteriormente dada respecto de la intersección de una cónica con una recta exterior, quedará justificada si se prueba que las proyectividades determinadas sobre r cortando los haces de rayos proyectivos generadores de la cónica Γ , admiten como involución unida la involución de puntos conjugados. Esta proposición quedará demostrada por el

TEOREMA. — *Las proyectividades sobre una recta r exterior a la cónica, obtenidas cortando dos haces de rayos proyectivos generadores de la cónica, son permutables.*

Sea una cónica Γ



Indiquemos con $\pi = \pi_{BA}$ la proyectividad que se obtiene sobre r , proyectando primero desde A un punto M_0 variable sobre la cónica, y proyectando en seguida desde B el mismo punto M_0 .

Tendremos:

$$AM_0 \cdot r = M$$

$$BM_0 \cdot r = M',$$

es decir será

$$\pi M = M' \quad [1]$$

Del mismo modo, indicando con $\pi_1 = \pi_{CB}$ la proyectividad que resulta sobre r proyectando los puntos de la cónica primero desde B y luego desde C , resulta

$$BM_0 \cdot r = M',$$

$$CM_0 \cdot r = M'',$$

y por tanto

$$\pi_1 M' = M_1 \quad [2]$$

De [1] y [2] resulta

$$\pi_1 \pi M = M_1 \quad [3]$$

Se trata de probar que sobre r se verifica

$$\pi_1 \pi M = \pi \pi_1 M \quad [p]$$

Según la construcción efectuada, la [3] nos dice que en la proyectividad $\pi_1 \pi$, el homólogo de M es M_1 .

Busquemos el homólogo de M en la proyectividad $\pi \pi_1$. Se tiene

$$B M_0' . r = M,$$

$$C M_0' . r = M''$$

o sea

$$\pi_1 M = M'' \quad [4]$$

Del mismo modo es

$$A M_0'' . r = M''$$

$$B M_0'' . r = \bar{M}_1$$

es decir

$$\pi M'' = \bar{M}_1 \quad [5]$$

De modo que por [4] y [5] sale

$$\pi \pi_1 M = \bar{M}_1 \quad [6]$$

Comparando [3], [6], se ve que para el verificarse de (p) es necesario que $M_1 = \bar{M}_1$.

Para demostrar que esta última identidad se cumple, consideramos el exágono simple $A M_0 C M_0' B M_0''$, inscripto en Γ .

Determinando su recta de Pascal, sale

$$A M_0 . M_0' B = M,$$

$$M_0 C . B M_0'' = M,$$

$$C M_0' . A M_0'' = M''$$

Luego, será $r = M M''$ la recta de Pascal. La relación $M C . B M''_0 = \bar{M}_1$ dice que $M_0 C . r = \bar{M}_1$. Pero teniendo en cuenta, como se ha visto más arriba, que $M_0 C . r = M_1$, se obtiene finalmente $M_1 = \bar{M}_1$.

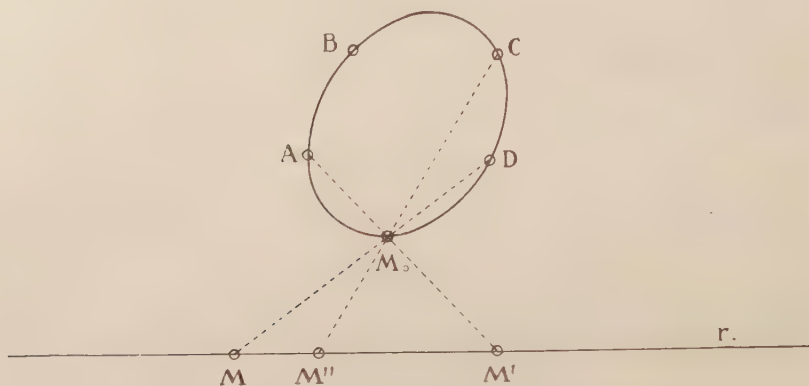
Hemos considerado el caso en que las proyectividades $(A) \cap (B)$ y $(B) \cap (C)$, admitían el haz (B) con centro en B , común. Pero es fácil mostrar que el teorema vale aún cuando esta circunstancia no se cumpla. En efecto, se consideran las proyectividades $(A) \cap (B)$ y $(C) \cap (D)$, que no tienen haz de rayos comunes.

Escribamos como antes

$$\pi = \pi_{BA} \quad ; \quad \pi_1 = \pi_{CD} \quad ; \quad \pi_2 = \pi_{AD} \quad ; \quad \pi_3 = \pi_{CA}$$

Resultará:

$$\begin{array}{l} \pi_2 M \equiv M' \\ \pi_3 M' \equiv M'' \end{array} \longrightarrow \pi_3 \pi_2 M \equiv M'' \quad [\alpha]$$



Pero se tiene del mismo modo

$$\pi_1 M \equiv M''$$

luego, por (α)

$$\pi_1 \equiv \pi_3 \pi_2$$

o lo que es lo mismo

$$\pi_{CD} \equiv \pi_{CA} \cdot \pi_{AD}$$

Como por la primer parte del teorema, tanto π_{CA} como π_{AD} son permutables con π_{BA} , por tener en ambos casos el haz (A) común, su producto también lo será; luego, se tiene finalmente

$$\pi_{BA} \cdot \pi_{CD} \equiv \pi_{CD} \cdot \pi_{BA}.$$

Por lo tanto, podemos dar la siguiente

DEFINICIÓN. — Llamaremos *intersección de una cónica con una recta r de su plano exterior a la cónica, a los puntos dobles imaginarios de la involución elíptica de puntos polares conjugados, que la cónica subordina sobre r .*

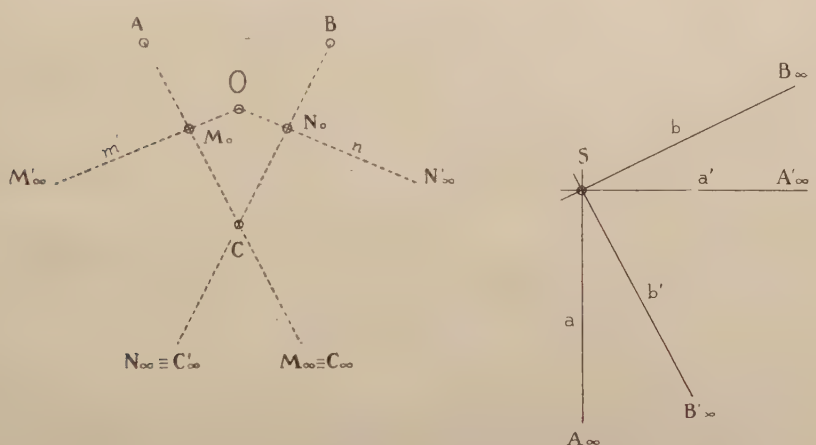
De lo que antecede resulta que decir que una cónica pasa por dos puntos imaginarios Ω de una recta r , es lo mismo que decir que

dicha cónica subordina sobre la recta una involución elíptica Ω_1 de puntos conjugados, tal que $\Omega_1 \equiv \Omega$.

§ 17. — El teorema que precede, permite extender la construcción de cónica por puntos (o por tangentes) cuando la cónica está definida por cinco puntos independientes, esto es, tales que tres cualesquiera no sean colineales, entre los cuales haya dos o cuatro puntos imaginarios.

Se demuestra, en efecto, por ejemplo, en el caso de que se tome dos puntos imaginarios (véase [8], pág. 236), que existe una cónica y es única, que pasa por dichos puntos. También puede enunciarse el teorema así: Existe una cónica en el plano que pasa por tres puntos reales independientes y subordina sobre una recta dada del plano que no pase por ninguno de los puntos dados, una involución elíptica Ω prefijada. Hagamos una aplicación sencilla al caso de una circunferencia dada por tres puntos independientes y los puntos cíclicos del plano.

Recordemos que dar los puntos cíclicos es lo mismo que dar una involución de rayos normales.



Sean, pues, A , B , C , tres puntos independientes y S la involución de rayos normales. Sea M_{∞} el punto impropio de la recta AC ; la polar de dicho punto respecto de la cónica buscada, deberá pasar por el conjugado armónico de M_{∞} respecto de A y C , es decir por M_0 , punto medio del segmento finito AC y por M'_0 , conjugado

de M_{∞} en la involución absoluta del plano, es decir, M'_{∞} será el punto impropio de las perpendiculares a la recta AC .

Será pues $m = M_0 M'_{\infty}$ la recta polar de M_{∞} . Por la misma razón, $n = N_0 N'_{\infty}$, perpendicular en el punto medio N_0 de BC , será la polar de N_{∞} . El punto $O = m.n$, será en consecuencia el polo de la recta impropia del plano, es decir, el centro de nuestra circunferencia.

Obsérvese que la aplicación del teorema conduce a la determinación del centro de nuestra circunferencia, a la misma construcción indicada en la geometría elemental.

Si quisiéramos construir nuestra circunferencia mediante haces de rayos proyectivos con centro en A y B , es decir, linealmente, observaríamos que la proyectividad entre los haces con centro en A y B , queda perfectamente determinada, pues si llamamos C_{∞} , C'_{∞} , los puntos impropios de los rayos AC , BC , queda sobre la recta impropia del plano definida una proyectividad que admite como puntos homólogos a los puntos C_{∞} , C'_{∞} y como involución unida, a la involución absoluta del plano

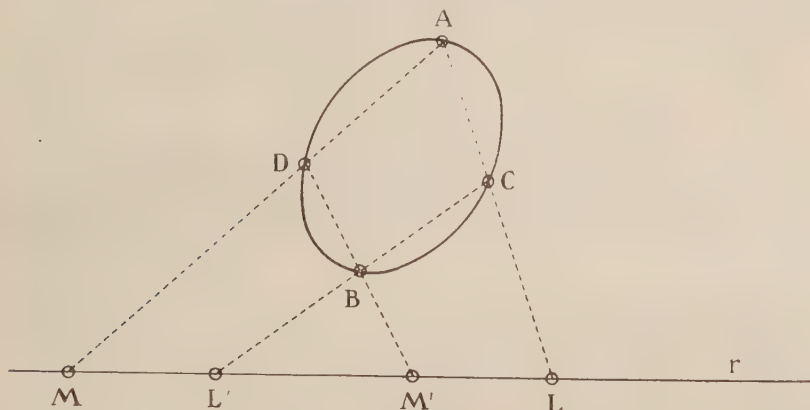
$$J = \begin{pmatrix} A_{\infty} & A'_{\infty} & B_{\infty} & B'_{\infty} \\ A'_{\infty} & A_{\infty} & B'_{\infty} & B_{\infty} \end{pmatrix}.$$

Construída dicha proyectividad, será suficiente proyectar desde A y B , pares de puntos homólogos, para obtener rayos homólogos en dichos haces.

§ 18. — Es bien conocido el teorema de Desargues, que afirma:

«Dada una cónica y un cuadrángulo inscripto en ella, toda recta secante a la cónica que no pasa por ninguno de los vértices del cuadrángulo, la corta en dos puntos que son conjugados en la involución Ω_p , determinada por las intersecciones de los tres pares de lados opuestos del cuadrángulo con la recta (véase [8], pág. 247). Si cuando la recta es no secante a la cónica se verifica que los puntos dobles imaginarios de la involución Ω , según los cuales la recta corta a la cónica pertenecen a la involución Ω_p , se habrá conseguido una extensión del teorema de Desargues al caso de una recta secante externa a la cónica.

Sea $ABCD$ un cuadrángulo completo, inscripto en Γ , y sea r una recta de su plano, no secante a Γ .



Considerando a Γ engendrada por los haces de rayos con centro en A y B y poniendo $\pi \equiv \pi_{BA}$ se tiene (siendo π la proyectividad que los haces (A) , (B) determinan sobre r):

$$\begin{aligned} L &\equiv AC \cdot r \\ L' &\equiv BC \cdot r \\ M &\equiv AD \cdot r \\ M' &\equiv BD \cdot r \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\longrightarrow \pi L \equiv L' \\ &\longrightarrow \pi M \equiv M' \end{aligned}$$

Para la proyectividad π , se tendrá

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} L & L'' & M & M'' & \dots \\ L' & L & M' & M & \dots \end{pmatrix} \quad [p]$$

Si L_1 es el conjugado armónico de L respecto de L', L'' , y del mismo modo M_1 es el conjugado armónico de M respecto de M', M'' , será

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} L & L_1 & M & M_1 \\ L_1 & L & M_1 & M \end{pmatrix}$$

la involución unida de la π , involución que define los puntos dobles imaginarios según los cuales la r corta a Γ .

Según se vió en el parágrafo (§ 14), las involuciones armónicas con π , esto es, permutables con Ω , o lo que es lo mismo, que contienen los puntos dobles imaginarios de Ω , son todas de la forma

$$\Omega_p \equiv \begin{pmatrix} L & M' & L' & M \\ M' & L & M & L' \end{pmatrix}. \quad [p']$$

La involución Ω_p contiene pues, los puntos dobles imaginarios de Ω . Pero la involución Ω_p no es sino la involución que los pares opuestos del cuadrángulo $ABCD$ determinan sobre la recta r . Podemos, pues, decir:

El par de puntos imaginarios comunes a la recta r y a la cónica Γ , están en involución con los tres pares de puntos que los pares de lados opuestos de un cuadrángulo inscripto en la cónica, determinan sobre la recta r .

BIBLIOGRAFÍA ⁽¹⁾

- [1] AMOEDO, FEDERICO. — *Lezioni di Geometria Proiettiva*. 1 Vol. 3ª edición. Editor: Ed. Luigi Pierro. Napoli: 1920.
- [2] AMODEO, FEDERICO. — *Origine e Sviluppo della Geometria Proiettiva*. Editor: B. Pellerano. Napoli: 1939.
- [3] BERZOLARI, LUIGI. — *Lezioni di Geometria Proiettiva*, date nella Regia Università di Torino, nell'anno scolastico 1894-1895.
- [4] BOMPIANI, E. — *Il principio di continuità e l'immaginario in Geometria*. Vol. II, part. 1ª de Questioni Riguardanti le Matematiche Elementari, raccolte e coordinate da Federico Enriques. Editor: Nicola Zanichelli. Bologna: 1925.
- [5] CHASLES, M. — *Traité de Géométrie Supérieure*. Deuxième édition. Editor: Gauthier-Villars. Paris: 1880.
- [6] DEL RE, ALFONSO. — *Lezioni sulle forme fondamentali dello Spazio Rigato e sulla dottrina degli immaginari*. Editor: Lorenzo Alvano. Napoli: 1906.
- [7] DEL RE, ALFONSO. — *Lezioni di Geometria Proiettiva ed Analitica Moderna*: 1906.
- [8] ENRIQUES, FEDERICO. — *Lezioni di Geometria Proiettiva*. Quarta Edizione. Editor: Nicola Zanichelli. Bologna: 1920.
- [9] ENRIQUES, F.; CHISINI, O. — *Lezioni sulla Teoria Geometrica delle Equazioni e delle Funzioni Algebriche*. Vol. I y II. Editor: Nicola Zanichelli. Bologna: 1915-1918.
- [10] JUEL, C. — *Vorlesungen Über Projektive Geometrie*. Editor: Julius Springer. Berlín: 1934.

(1) Las citas bibliográficas, se hacen indicando un número encerrado en un paréntesis cuadrado.

- [11] LORIA, GINO. — *Il Passato e il Presente delle Principali Teorie Geometriche*. Cuarta edizione: 1 Vol. Editor: Cedam. Padova: 1936.
- [12] PASCAL, BLAS. — *L'Oeuvre de Pascal*. Texte établi et annoté par Jacques Chevalier. Editor: Bibliothèque n r f de la Pléiade. París: 1936.
- [13] PONCELET, J. V. — *Traité des Propriétés Projectives des Figures*. 2ª edición. Editor: Gauthier-Villars. París: 1865-1866.
- [14] PONCELET, J. V. — *Applications d'Analyse et de Geometrie*. Editor: Gauthier-Villars. París: 1864.
- [15] REY PASTOR, JULIO. — *Fundamentos de la Geometría Projectiva Superior*. Editor: Junta para la Ampliación de Estudios. Madrid: 1916.
- [16] SANNIA, Prof. ACHILLE. — *Lezioni di Geometria Proiettiva*. Seconda Edizione, con prefazione di E. D'Ovidio. Editor: B. Pellerano. Napoli: 1895.
- [17] SEGRE, C. — *Le coppie di elementi imaginari, nella geometria proiettiva sintetica*. Memorie della R. Academia delle Scienze di Torino. Vol. 38. 2ª Serie, 1886, pág. 3/24.
- [18] SEVERI, FRANCESCO. — *Geometria Proiettiva*. Editrice Universitaria « La Libreria ». Padova: 1921.
- [19] SEVERI, FRANCESCO. — *Complementi di Geometria Proiettiva*. Editor: Nicola Zanichelli. Bologna: 1905.
- [20] STAUDT, G. C. C. — *Geometria di posizione*. Traduzione dal tedesco a cura del Dott. M. Pieri. Editor: Fratelli Bocca. Torino: 1889.
- [21] STAUDT, K. G. CHR. VON. — *Beitrage zur Geometrie der Lage*. Fasc. 1: Nuremberg 1856; fasc. 2: Nuremberg 1857; fasc. 3: Nuremberg: 1860.
- [22] TORROJA, EDUARDO. — *Tratado de Geometría de la Posición y sus Aplicaciones a la Geometría de la medida*. Editor: Establecimiento Tipográfico de G. Juste. Madrid: 1899.
- [23] TRESSE, A. — *Géométrie Projective*. Exposé d'après l'article allemand de A. Schoenflies. Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées. Tom. III, Vol. 2, Fsc. 1. Editor: Gauthier-Villars. París: 1913.

TARIFAS FERROVIARIAS DE UTILIDAD MAXIMA

POR

EMILIO REBUELTO

(Continuación) (*)

Sea pues el caso de calcular una tarifa kilométrica a utilizarse en un ferrocarril de longitud $x_0 < \frac{v}{2g}$, siendo $x = \frac{v}{2g}$, como ya determinamos, la longitud de línea ferroviaria en explotación que produciría la utilidad máxima para la Empresa, utilizando tarifas kilométricas. El caso así planteado se resuelve generalmente adoptando la más elevada de las tarifas kilométricas que permita llegar hasta la distancia x_0 , « para extraer del tráfico todo lo que el tráfico puede dar », según una frase vulgarmente empleada. Porque si más allá de la distancia x_0 no existen cargas a transportar, desde que los rieles llegan solamente hasta x_0 , es inútil emplear tarifas susceptibles de permitir semejantes transportes. En resumen, se decide que a la distancia x_0 , la tarifa debe alcanzar a v , cantidad máxima que puede invertir el productor para el pago del servicio; luego la ecuación de la tarifa será

$$y = \frac{v}{x_0} x, \quad \text{siendo} \quad x_0 < \frac{v}{2g}$$

El ancho de la zona a cada lado de la vía será

$$y_z = \frac{v - y}{f} = \frac{x_0 - x}{f x_0} v$$

Como es lógico, para $x = x_0$, $y_z = 0$, terminando la zona de posible afluencia de cargas, zona cuya forma triangular es evidente.

(*) Ver *Anales*, Marzo de 1939, T. CXXVII, pág. 207 a 229; Abril, pág. 306 a 318; Mayo, pág. 377 a 392; y junio, pág. 462 a 478.

Su área será la de un triángulo isósceles de base $\frac{v}{f}$, (que es el valor de $2 y_z$ para $x = 0$ y de altura x_0 , (valor de x para $y_z = 0$).

La producción correspondiente alcanzaría a $\frac{\gamma v x_0}{f}$ y considerándola concentrada en su centro de gravedad, el trabajo necesario para su transporte será

$$\frac{1}{3} x_0 \cdot \frac{\gamma v x_0}{f} = \frac{\gamma v x_0^2}{3 f}$$

Teniendo en cuenta que por el transporte de una tonelada a un kilómetro de distancia, se cobra $\frac{v}{x_0}$, de acuerdo a la tarifa, y que la Empresa gasta g , la utilidad producida por el total de las cargas, será

$$U = \frac{\gamma v x_0^2}{3 f} \left(\frac{v}{x_0} - g \right) = \frac{\gamma v}{3 f} (v - g x_0) x_0$$

En esta expresión, *no hay ningún elemento variable*, pues x_0 se supone que es la longitud fija de un ferrocarril ya construído. No estamos frente a un problema de máximo o mínimo posible, sino de un *mayor valor*, pues esto es lo que implícitamente hemos supuesto al haber adoptado la *mayor tarifa* compatible con la distancia x_0 hasta la cual debe ser extendido el transporte.

Sin embargo, y esto constituye un *resultado nuevo y de indudable interés*, es factible lograr una utilidad *mayor*, con una tarifa kilométrica *menor*. Creemos que este aspecto desconocido de las tarifas kilométricas, somos los primeros en señalarlo.

En efecto: busquemos los resultados a obtener con una tarifa de ecuación

$$y = \lambda x \quad \text{siendo} \quad \lambda < \frac{v}{x_0} ; \quad \text{y} \quad x_0 < \frac{v}{2 g}$$

Tendremos sucesivamente, que el ancho de la zona será

$$y_z = \frac{v - \lambda x}{f}$$

mas una cierta área semicircular en punta de rieles, con un radio igual a $\frac{v - \lambda x_0}{f}$. Despreciando por ahora esta área semicircular, quedará un trapecio de área igual a

$$\left(\frac{v}{f} + \frac{v - \lambda x_0}{f} \right) x_0 = (2v - \lambda x_0) \frac{x_0}{f}$$

La multiplicación por γ nos proporcionará la producción de la zona. Pero aquí, tratándose de la producción recogida en una área trapezoidal, cuyo centro de gravedad no tiene expresión analítica sencilla, no es cómodo emplear el mismo procedimiento utilizado en los ejemplos inmediatamente anteriores: procederemos calculando la diferencial de la producción

$$dQ = 2\gamma y_z dx = \frac{2\gamma}{f} (v - \lambda x) dx$$

y la diferencial de la utilidad

$$dU = (y - gx) dQ = \frac{2\gamma}{f} (y - gx) (v - \lambda x) dx.$$

La y representa aquí la ecuación de la tarifa o sea, λx , luego

$$dU = \frac{2\gamma}{f} (\lambda - g) (v - \lambda x) x dx$$

·e integrando entre 0 y x_0 ,

$$\begin{aligned} U &= \frac{2\gamma}{f} (\lambda - g) \int_0^{x_0} (v - \lambda x) x dx \\ &= \frac{\gamma x_0^2}{3f} (\lambda - g) (3v - 2\lambda x_0) \end{aligned}$$

Los dos últimos factores de esta expresión, constituyen una función de λ cuyo máximo podemos buscar. Formando la derivada de U respecto a λ e igualándola a cero, resulta

$$3v - 4x_0\lambda + 2gx_0 = 0$$

$$\lambda = \frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2}$$

Sustituyendo este valor de λ en la expresión encontrada para U , obtendremos para la utilidad máxima

$$\begin{aligned} U_{máx} &= \frac{\gamma x_0^2}{3f} \left(\frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2} - g \right) \left(3v - \frac{3v}{2} - gx_0 \right) \\ &= \frac{\gamma x_0}{24f} (3v - 2gx_0)^2 \end{aligned}$$

Que esta utilidad es un máximo, puede comprobarse recordando que

$$\frac{d^2 U}{d\lambda^2} = -4x_0$$

despreciando los otros factores constantes y positivos. Y para apreciar si su valor es mayor o menor que el de la encontrada antes, calcularemos su diferencia:

$$\begin{aligned} U_{máx} - U &= \frac{\gamma x_0}{24f} (3v - 2gx_0)^2 - \frac{\gamma x_0}{3f} (v - gx_0)v \\ &= \frac{\gamma x_0}{24f} [(3v - 2gx_0)^2 - 8(v - gx_0)v] \\ &= \frac{\gamma x_0}{24f} [v^2 - 4vgx_0 + 4g^2x_0^2] \\ &= \frac{\gamma x_0}{24f} (v - 2gx_0)^2 \end{aligned}$$

cantidad evidentemente positiva. Luego hemos obtenido una utilidad *mayor* con una tarifa kilométrica *menor* para todas las distancias. Esta última parte de nuestra afirmación la comprobamos fácilmente, pues antes, lo cobrado, por trasportar una tonelada a un kilómetro era $\frac{v}{x_0}$ y ahora es el valor hallado para λ o sea,

$\frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2}$; su diferencia es

$$\frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2} - \frac{v}{x_0} = \frac{1}{4x_0} (2gx_0 - v)$$

y como $x_0 < \frac{v}{2g}$ resulta $2gx_0 - v < 0$, lo que evidencia el signo negativo de la diferencia, demostrándose así cómo una rebaja de tarifa kilométrica, nos puede producir una mayor utilidad.

EJEMPLO.—Volvamos a tomar los datos de un caso anterior, en el que suponíamos se estuviese construyendo un ferrocarril, librando al servicio tramos sucesivos de 50 km, y estableciendo para las distintas longitudes que va adquiriendo la vía en servicio público, la más alta tarifa kilométrica soportable por el tráfico en cada caso. Los otros valores eran

$$v = 10 \text{ \$ m/n} ; \quad \gamma = 40 \text{ ton} ; \quad g = 0,0107 \text{ \$ m/n} ; \quad f = 0,35 \text{ \$ n/m}$$

Cuando se libre al servicio el primer tramo de 50 km, a esa distancia x_0 , la mercadería producida en la misma punta de rieles podrá pagar \$ 10 m/n (valor de v), y por lo tanto se le puede aplicar una tarifa de

$$y = \frac{v}{x_0} x = \frac{10}{50} x = 0,2 x$$

y la correspondiente utilidad obtenida será de acuerdo con la fórmula deducida

$$U = \frac{\gamma v}{3f} (v - g x_0) x_0 = \frac{40 (10)}{3 (0,35)} [10 - 0,0107 (50)] 50$$

$$= 180.286 \text{ \$ m/n.}$$

« Mientras la línea no se prolongue — hemos dicho antes —, no habrá interés en rebajar la tarifa, pues a mayor distancia de 50 km no hay todavía tráfico posible ». Esto es, efectivamente, la opinión general y lo que parece lógico, tratándose de tarifas kilométricas: pero el análisis que acabamos de hacer muestra lo erróneo de tal creencia. En efecto: con una tarifa

$$y = \left(\frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2} \right) x = \left[\frac{3 (10)}{4 (50)} + 0,00535 \right] x =$$

$$= 0,15535 x$$

menor por lo tanto que la de $0,2 x$, la utilidad sería.

$$U_{máx} = \frac{\gamma x_0}{24f} (3v - 2gx_0)^2$$

$$= \frac{40 (50)}{24 (0,35)} [30 - 0,0214 (50)]^2$$

$$= 199.272 \text{ \$ m/n.}$$

La diferencia de las dos utilidades llega a 18.986 \$ m/n, lo que representa un 10 % de aumento.

Al incorporar el segundo tramo de 50 km, la tarifa más alta que entonces podrá soportar el tráfico sería

$$y = \frac{v}{x_0} x = \frac{10}{100} x = 0,1 x$$

y con ella iba a conseguirse una utilidad de

$$U = \frac{\gamma v}{3 f} (v - g x_0) = \frac{40 (10)}{3 (0,35)} (10 - 1,07) 100 \\ = 340.190 \text{ \$ m/n}$$

Pero con una tarifa más baja, igual a

$$y = \left(\frac{3 v}{4 x_0} + \frac{g}{2} \right) x = \left[\frac{3 (10)}{4 (100)} + 0,00535 \right] x \\ = 0,08035 x$$

la utilidad iba a ser

$$U_{máx} = \frac{40 (100)}{24 (0,35)} [3 (10) - 2,15] \\ = 369.609 \text{ \$ m/n.}$$

El incremento de utilidad conseguido es mayor que en el tramo anterior (29.419 \$ m/n contra 18.986 \$ m/n) aunque representa un porcentaje de aumento algo más bajo (8,6 % contra 10 %).

La incorporación del tercer tramo, obligaría a adoptar como tarifa más alta compatible con la distancia de 150 km y el valor de $v = 10$, la de

$$y = \frac{v}{x_0} x = \frac{10}{150} x = 0,06667 x$$

En cambio la que conduciría a obtener una utilidad máxima, será

$$y = \left[\frac{3 (10)}{4 (150)} + 0,00535 \right] x = 0,05535 x$$

y así sucesivamente. Es claro que conforme nos vayamos aproximando a la distancia $\frac{v}{2g} = 420$ km, las diferencias entre estas dos tarifas, así como entre las utilidades que respectivamente producen, irán disminuyendo, hasta desaparecer.

En la realidad, los resultados van a ser aun más favorables, pues con la tarifa rebajada, queda cierto margen en punta de rieles, lo que da origen a una pequeña zona semicircular, cuya producción puede ser transportada con ganancia para la empresa. El radio de este semicírculo será igual a $\frac{v - \lambda x}{f}$, y por lo tanto la producción a transportar será el área de este semicírculo, por γ

$$Q = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{v - \lambda x_0}{f} \right)^2 \gamma$$

y como se transporta desde la distancia x_0 , con la tarifa λx_0 , y los gastos $g x_0$, originará a la Empresa un suplemento de utilidad

$$U_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{v - \lambda x_0}{f^2} \right)^2 \gamma (\lambda - g) x_0$$

el cual deberá ser sumado al U_{max} .

En el ejemplo anterior, para $x_0 = 50$ km; y $\lambda = 0,15535$ \$ m/n, la utilidad máxima calculada llegó a 199.272 \$ m/n; a este valor deberá agregarse la utilidad obtenida con las cargas provenientes del semicírculo de radio.

$$R = \frac{v - \lambda x_0}{f} = \frac{10 - 0,15535 (50)}{0,35} = 6,4 \text{ Km.}$$

Las toneladas serán

$$Q = \frac{1}{2} \pi R^2 \gamma = 62,8 (6,4)^2 = 2571 \text{ ton}$$

y la utilidad

$$U_1 = Q (\lambda - g) x_0 = 2571 (0,1447) 50 = 18,550 \text{ $ m/n}$$

que agregados a los 199.272 \$ m/n calculados antes, llegarían a 217.822 \$ m/n, conseguidos con una tarifa de 0,15535 x , mientras que con $2x$, sólo se obtenían 180.286 \$ m/n.

Después de incorporado al servicio el segundo tramo, siendo entonces $x_0 = 100$ y $\lambda = 0,08035$, el radio del semicírculo, para la zona de punta de rieles, será

$$R = \frac{v - \lambda x_0}{f} = \frac{10 - 0,08035 (100)}{0,35} = 5,6 \text{ Km}$$

y las toneladas

$$Q = \frac{1}{2} \pi R^2 \gamma = 62,8 (5,6)^2 = 1969 \text{ ton}$$

de donde un suplemento de utilidad igual a

$$U_1 = Q (\lambda - g) x_0 = 1969 (0,069) (100) = 11,804 \$ \text{ m/n}$$

cantidad que debemos agregar a los 369.609 \$ m/n obtenidos para U_{max} , llegando así a 381.413 \$ m/n, contra 340.190 \$ m/n provenientes de adoptar una tarifa más alta (0,1 en vez de 0,08035).

Todavía se puede encontrar una tarifa que rinda mayor utilidad, si bien su cálculo es tan laborioso, que no resulta práctico. Escribamos la expresión de la utilidad total, o sea la proveniente de la zona trapezoidal y del semicírculo de punta de rieles:

$$U = \frac{\gamma x_0^2}{3f} (\lambda - g) (3v - 2\lambda x_0) + \frac{\pi}{2} \left(\frac{v - \lambda x_0}{f} \right)^2 \gamma (\lambda - g) x_0$$

y si buscamos su derivada respecto a λ , igualándola a cero después de algunas simplificaciones, llegaremos a una expresión de la forma

$$A \lambda^2 + 2 B \lambda + C = 0,$$

en la cual

$$A = 3 \pi x_0^2$$

$$B = - \left[\left(\frac{4}{3} f + \pi g \right) x_0^2 + 2 \pi v x_0 \right]$$

$$C = \frac{4}{3} f g x_0^2 + 2 (f + \pi g) v x_0 + \pi v^2$$

Como todos los valores que figuran en los segundos miembros son positivos, los signos de B y C indican que los dos valores de λ son positivos (tal como corresponde a la naturaleza del problema) y también reales. Su expresión es

$$\lambda = \frac{-B \pm x_0 \sqrt{M x_0^2 + 2 N x_0 + P}}{A}$$

en donde A y B tienen los valores ya indicados siendo además:

$$M = \frac{16}{9} f^2 - \frac{4}{3} \pi f g + \pi^2 g^2$$

$$N = - \frac{\pi v}{3} (f + 3 \pi g)$$

$$P = \pi^2 v^2$$

Para encontrar cual de los dos valores de λ corresponde a U_{max} , los sustituiremos en la segunda derivada

$$\begin{aligned} 2(A\lambda + B) &= 2 \left(A \frac{-B \pm x_0 \sqrt{Mx_0^2 + 2Nx_0 + P}}{A} + B \right) \\ &= \pm 2x_0 \sqrt{Mx_0^2 + 2Nx_0 + P} \end{aligned}$$

la que indica que el valor de λ correspondiente al signo negativo, nos producirá el máximo buscado, cuyo valor obtendremos sustituyendo el valor hallado para λ en la última expresión escrita de U . Como comprobación de los resultados numéricos, conviene tener escrita la expresión de U en función de λ , que es

$$U = \frac{\gamma x_0}{2f^2} \left[\frac{A}{3} \lambda^3 + B \lambda^2 + C \lambda - (2fx_0 + \pi v)vg \right]$$

y recalcular con ella el U_{max} .

La investigación anterior demuestra que para cada distancia $x_0 < \frac{v}{2g}$ existe una tariza λx , en que $\lambda < \frac{v}{x_0}$ y que produce la utilidad máxima para esa distancia, y por lo tanto un máximo del interés i , para tal distancia, pues aumenta U , para un mismo capital Cx_0 . En cuanto al coeficiente de explotaciones o relación de gastos a productos es evidente que para las zonas triangulares o trapezoidales, se tiene $E = \frac{g}{\lambda}$; y entonces, para la zona triangular, siendo $\lambda = \frac{v}{x_0}$, resulta $E = \frac{gx_0}{v}$; y para la zona trapezoidal, cuando es

$$\lambda = \frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2},$$

tendremos

$$E_1 = \frac{g}{\frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2}} = \frac{4gx_0}{3v + 2gx_0}$$

Este valor es mayor que el anterior, lo que se comprueba calculando

$$\begin{aligned} E_1 - E &= \frac{4gx_0}{3v + 2gx_0} - \frac{gx_0}{v} \\ &= gx_0 \frac{v - 2gx_0}{(3v + 2gx_0)v} \end{aligned}$$

y como se ha supuesto que

$$x_0 < \frac{r}{2g}$$

resulta positivo el signo de la diferencia $E_1 - E$; luego $E_1 > E$. Se ha conseguido una mayor utilidad, al adoptar un λ menor, a expensas de un coeficiente de explotación más desfavorable.

Hasta aquí, hemos planteado siempre los problemas, *desde el punto de vista de la Empresa*, o sea, determinando las tarifas del modo que proporcionen la máxima utilidad al transportador. Ensayaremos ahora el estudio de las tarifas kilométricas *desde el punto de vista del productor (o del consumidor)* de las mercaderías transportadas. Evidentemente, se trata de intereses encontrados y los nuevos resultados a obtener, no van siempre a coincidir con los que acabamos de exponer.

Consideremos primero el caso hipotético de que la producción obtenida en la línea límite o extrema de la zona (o sea, a la distancia del ferrocarril, que hemos llamado y_z) no deje ya utilidad ninguna al productor. Esto es, por otra parte, lo que hemos supuesto hasta ahora, pues la utilidad dejada a un productor por una carga originada a la distancia x del mercado (por ferrocarril), y a la distancia y del ferrocarril (por camino), será

$$q_{pr} = v - yf - y_t$$

$$y = \frac{v - y_t - g_{pr}}{f}$$

siendo y_t la expresión de la tarifa.

Cuando $g_{pr} = 0$, la distancia y llega a ser la y_z ; en efecto

$$y_z = \frac{v - y_t}{f}$$

es la fórmula utilizada hasta ahora como expresión de la línea que delimita a ambos lados del ferrocarril, la zona de afluencia.

Para escribir la expresión de la utilidad obtenida por todos los

productores del rectángulo infinitesimal $2 y_z dx$ consideraremos la diferencial de esta producción:

$$dQ = 2 \gamma y_z dx = \frac{2 \gamma}{f} (v - y_t) dx$$

la cual supondremos concentrada en el centro de gravedad del rectángulo, o sea la distancia $\frac{1}{2} y_z$ del ferrocarril; el costo de su transporte hasta la estación, será

$$\frac{1}{2} y_z f = \frac{v - y_t}{2}$$

por cada unidad de carga; la tarifa ferroviaria, es y_t ; y como el coeficiente de transporte o diferencia entre el precio de venta en el mercado y el costo de producción es v , restando de este valor los dos gastos de transporte (por camino y por ferrocarril), tendremos como expresión de la ganancia dejada al productor por cada unidad de carga

$$v - \frac{v - y_t}{2} - y_t = \frac{v - y_t}{2}$$

de donde

$$dU_{pr} = \frac{v - y_t}{2} dQ$$

$$= \frac{\gamma}{f} (v - y_t)^2 dx$$

$$\therefore U_{pr} = \frac{\gamma}{f} \int_0^{x_0} (v - y_t)^2 dx$$

En el caso de las tarifas de tipo kilométrico $y_t = mx$, tendremos

$$U_{pr} = \frac{\gamma}{f} \int_0^{x_0} (v - mx)^2 dx$$

$$= \frac{\gamma}{3mf} [(mx_0 - v)^3 + v^3]$$

$$= \frac{\gamma x_0}{3f} [m^2 x_0^2 - 3m x_0 v + 3v^2]$$

Por las condiciones en que ha sido planteado el problema, $mx_v - v < 0$; luego cuanto *menor* es m (para iguales valores de x_0 y de v), mayor será U_{pr} lo cual es evidente, pues a menor tarifa, aumenta la zona de afluencia y por lo tanto las cargas posibles de ser transportadas, a la vez que disminuye el costo de su transporte, dos factores concurrentes a producir el mismo efecto de aumentar la suma de las utilidades obtenidas por los productores de la zona.

Pero hemos visto en el análisis anterior, que a la empresa no le conviene rebajar la tarifa más que hasta $m = 2g$, cuando $x_0 = \frac{v}{2g}$ pues entonces es cuando ella obtiene sus utilidades máximas: resulta

$$m x_0 - v = 2g \frac{v}{2g} - v = 0$$

$$U_{pr} = \frac{\gamma v^3}{3 m f} = \frac{\gamma v^3}{6 f g}$$

que será el *mayor valor* al que podrán aspirar los productores; recordemos que la U_{max} de la empresa, para esta distancia x_0 no llega más que a $\frac{\gamma v^3}{12 f g}$, y para distancias mayores es aun menor, anulándose para $m = g$ y $x_0 = \frac{v}{g}$, caso límite en el cual el conjunto de los productores ganaría $\frac{\gamma v^3}{3 f g}$. Correspondería esta situación a un ferrocarril de estricto fomento, que transportase al costo.

Para distancias x_0 menores que $\frac{v}{2g}$, ya hemos visto que se pueden aplicar dos tipos distintos de tarifas; la máxima posible,

$$y_t = \frac{v}{x_0} x$$

y la que proporciona la utilidad máxima, que despreciando las cargas provenientes del semicírculo de punta de rieles, era

$$y_t = \left(\frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2} \right) x$$

La primera corresponde a un valor de m igual a $\frac{v}{x_0}$, y entonces.

$$U_{pr} = \frac{\gamma v^3 x_0}{3 v f} = \frac{\gamma v^2 x_0}{3 f}$$

valor que irá creciendo junto con x_0 .

La segunda corresponde a un valor de m igual a

$$\frac{3v}{4x_0} + \frac{g}{2} = \frac{3v + 2gx_0}{4x_0}$$

lo que conducirá a

$$U_{pr} = \frac{4\gamma x_0}{3f(3v + 2gx_0)} \left[\left(\frac{2gx_0 - v}{4} \right)^3 + v^3 \right]$$

Como $2gx_0 < v$, el primero de los dos cubos que figuran en el paréntesis, será negativo; en general su valor numérico es pequeño, por lo que puede ser despreciado ante v^3 , y adoptar como expresión final

$$U_{pr} = \frac{4\gamma x_0 v^3}{3f(3v + 2gx_0)} = \frac{\gamma v^2 x_0}{3f} \cdot \frac{4v}{3v + 2gx_0}$$

lo que evidencia que este nuevo valor encontrado para U_{pr} es mayor que el suministrado por la primera tarifa pues siendo $2gx_0 < v$, resulta

$$\frac{4v}{3v + 2gx_0} > 1$$

Con los mismos datos del ejemplo anterior, para $x_0 = 50$, con la primera tarifa $y = 0,2x$ la utilidad obtenida por los productores será

$$U_{pr} = \frac{\gamma v^2 x_0}{3f} = \frac{40(10)^2 50}{3(0,35)} = 190.047 \text{ \$ m/n}$$

contra 180.286 \$ m/n que conseguía la Empresa. Pero con la tarifa $y = 0,15535x$, lograríamos un porcentaje de aumento representado por

$$\frac{4v}{3v + 2gx_0} = \frac{40}{30 + 2(0,0107)50} = \frac{40}{31,07} = 1,28$$

o sea

$$U_{pr} = 190.047(1,28) = 243.260 \text{ \$ m/n}$$

y a la vez, la Empresa obtuvo 199.272 \$ m/n. Como se ve, la nueva tarifa ha beneficiado simultáneamente a la Empresa y a los productores, pero más a estos últimos.

Los resultados son concluyentes en el sentido de mostrar como, el establecimiento de tarifas bien estudiadas, permiten obtener ventajas a las dos partes

—productores y transportadores— sin que uno de ellos se beneficie a costa del otro.

La cantidad despreciada es

$$\left(\frac{2g x_0 - v}{4}\right)^3 = -\frac{(712,122)^3}{64} = -11,12$$

al lado de $v^3 = 1000$; se ha tomado pues 1000 en vez de 988,88. La diferencia es poco más del 1 %, lo que no tiene importancia en cálculos de esta clase. Además, deben agregarse las utilidades provenientes de la zona semi-circular de punta de rieles, tanto para la Empresa como para los productores.

Consideremos ahora el caso en que a los productores ubicados en la línea limítrofe de la zona de afluencia, les quede una cierta ganancia g_{pr} ; entonces la y_z es

$$y_z = \frac{v - y_t - g_{pr}}{f}$$

y sucesivamente

$$dQ = 2\gamma y_z dx = \frac{2\gamma}{f} (v - y_t - g_{pr}) dx$$

$$dU_{pr} = \left(v - \frac{1}{2} y_z f - y_t\right) dQ$$

$$\begin{aligned} U_{pr} &= \frac{\gamma}{f} \int_0^{x_0} (v - y_t - g_{pr}) (v - y_t + g_{pr}) dx \\ &= \frac{\gamma}{f} \int_0^{x_0} [(v - y_t)^2 - g_{pr}^2] dx \end{aligned}$$

y para el caso de las tarifas kilométricas del tipo $y_t = mx$, resultará

$$\begin{aligned} U_{pr} &= \frac{\gamma}{f} \int_0^{x_0} (v - mx)^2 dx - \frac{\gamma g_{pr}^2}{f} x_0 \\ &= \frac{\gamma}{3mf} [(mx_0 - v)^3 + v^3] - \frac{\gamma}{f} g_{pr}^2 x_0 \\ &= \frac{\gamma}{3mf} [m^3 x_0^3 - 3m^2 x_0^2 v + 3mv^2 x_0] - \frac{\gamma}{f} g_{pr}^2 x_0 \\ &= \frac{\gamma x_0}{3f} [m^2 x_0^2 - 3m x_0 v + 3v^2] - \frac{\gamma}{f} g_{pr}^2 x_0 \end{aligned}$$

Aquí, el coeficiente m de la tarifa es igual a $\frac{v - g_{pr}}{x_0}$ de donde $m x_0 = v - g_{pr}$; y substituyendo se tendrá:

$$\begin{aligned} U_{pr} &= \frac{\gamma x_0}{3f} [(v - g_{pr})^2 - 3(v - g_{pr})v + 3v^2 - 3g_{pr}^2] \\ &= \frac{\gamma x_0}{3f} [v^2 + g_{pr}v - 2g_{pr}^2] \end{aligned}$$

Esta expresión, de la utilidad total de los productores, U_{pr} , resulta una función de la utilidad individual supuesta para el productor ubicado en los puntos más alejados de la zona de afluencia, g_{pr} , función que es susceptible de alcanzar un máximo:

$$\begin{aligned} \frac{d U_{pr}}{d g_{pr}} &= \frac{\gamma x_0}{3f} [v - 4g_{pr}] = 0 \\ \frac{d^2 U_{pr}}{d g_{pr}^2} &= \frac{\gamma x_0}{3f} (-4) \end{aligned}$$

Luego adpotando $g_{pr} = \frac{v}{4}$, tendremos una U_{pr} máxima, que será igual a

$$U_{pr, \text{máx}} = \frac{\gamma x_0}{3f} \left[v^2 + \frac{v^2}{4} - \frac{v^2}{8} \right] = \frac{3 \gamma v^2 x_0}{8f}$$

la que será obtenida con una tarifa igual a

$$y = \frac{v - \frac{v}{4}}{x_0} x = \frac{3v}{4x_0} x$$

Esta tarifa es la más elevada que corresponde a una cierta distancia x_0 , y es a la vez compatible con la condición de permitir una utilidad individual al productor más alejado del ferrocarril, que procura a la vez una utilidad máxima al conjunto de los productores.

Con los mismos datos del ejemplo anterior, calculemos la utilidad de los productores ubicados en el primer tramo de 50 km.

$$\begin{aligned} U &= \frac{\gamma x_0}{3f} [v^2 + g_{pr}v - 2g_{pr}^2] \\ &= \frac{40(50)}{3(0,35)} [100 + 10g_{pr} - 2g_{pr}^2] \\ &= 1904,76 [100 + 10g_{pr} - 2g_{pr}^2] \end{aligned}$$

Para $g_{pr} = 2$ \$ m/n resulta

$$U = 1904,76 [100 + 20 - 8] = 213,333 \text{ $ m/n}$$

Para $g_{pr} = 2,80$ \$ m/n, tendremos

$$U = 1904,76 [100 + 28 - 15,68] = 213,942 \text{ $ m/n}$$

Contentándonos con una ganancia individual un poco menor, $\frac{v}{4} = 2,50$ \$ m/n, que es la correspondiente al máximo, llegaremos a

$$U = 1904,76 [100 + 25 - 12,5] = 214,628 \text{ $ m/n}$$

cantidad que es, efectivamente mayor que las dos anteriores, y es el máximo a que pueden aspirar los productores de la zona, hasta la distancia x_0 .

Cuanto mayor es x_0 , menor resulta la tarifa; pero la empresa no va a aplicarla a distancias mayores de

$$x_0 = \frac{3/4 v}{2 g} = \frac{3 v}{8 g}$$

pues entonces

$$y = \frac{3 v}{4 \cdot \frac{3 v}{8 g}} x = 2 g x,$$

que ya comprobamos, es la que permite el máximo de utilidad a la Empresa. Quiere decirse, que la misma tarifa que procura el máximo de utilidad a la Empresa, (cuando se aplica hasta la distancia $\frac{v}{2 g}$), es susceptible de procurar a la vez la máxima utilidad individual al conjunto de productores ubicados a lo largo de la línea férrea, desde el origen, hasta una distancia $\frac{3 v}{8 g} = 0,375 l$, siendo l la distancia máxima de transporte posible para una carga con un coeficiente de transporte igual a v , sobre un ferrocarril cuyos gastos directos son g . En el tramo de línea comprendido entre $0,375 l$ y $0,5 l$, los productores ganarán menos, y los ubicados en los límites extremos de la zona de afluencia, no ganarán nada. Más allá de $0,5 l$, la tarifa es inaplicable, pues su valor sobrepasa al coeficiente de transporte, v , que es lo máximo que puede gastar el productor.

El resumen de este análisis, demuestra, que asignando a cada productor, por lo menos, una ganancia mínima de $\frac{v}{4}$ \$ m/n por tonelada, y aplicando la tarifa $y = 2gx$ hasta la distancia $\frac{3v}{8g}$, el conjunto de los productores obtiene una utilidad máxima igual a

$$U_{pr, miv} = \frac{3 \gamma v^2 x_0}{8f} = \frac{3 \gamma v^2}{8f} \frac{3v}{8g} = \frac{9 \gamma v^3}{64fg}$$

La producción correspondiente, recogida en la zona de afluencia resultará de integrar

$$dQ = \frac{2\gamma}{f} (v - y_t - g_{pr}) dx$$

entre cero y $\frac{3v}{8g}$; para $y_t = 2gx$, y $g_{pr} = \frac{v}{4}$: se llega a

$$Q = \frac{9 \gamma v^2}{32fg}$$

y en cuanto a la Empresa, como suponemos que no aplica la tarifa más que hasta una distancia x igual a $\frac{3v}{8g}$ y con una ordenada de la línea límite de la zona de afluencia, y_z igual a

$$y_z = \frac{\frac{3}{4}v - 2gx}{f} = \frac{3v - 8gx}{4f}$$

resultará

$$dQ = 2\gamma y dx = \frac{2\gamma}{4f} (3v - 8gx) dx$$

$$dU = (y_t - gx) dQ$$

$$= (2gx - gx) \frac{2\gamma}{4f} (3v - 8gx) dx$$

$$= \frac{\gamma g}{2f} (3vx - 8gx^2) dx$$

e integrando

$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^{\frac{3v}{8g}} \frac{\gamma g}{2f} (3vx - 8gx^2) dx \\
 &= \frac{\gamma g}{2f} \left[3v \cdot \frac{x^2}{2} - 8g \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{3v}{8g}} \\
 &= \frac{\gamma g}{2f} \cdot v^2 \left[\left(\frac{3}{2}v - \frac{8}{3}gx \right) \right]_0^{\frac{3v}{8g}} \\
 &= \frac{\gamma g}{2f} \cdot \frac{9v^2}{64g^2} \left(\frac{3}{2}v - \frac{8}{3}g \cdot \frac{3v}{8g} \right) \\
 &= \frac{9\gamma v^3}{128fg} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) = \frac{9\gamma v^3}{256fg}
 \end{aligned}$$

Dividiendo la utilidad del productor, por la cantidad de toneladas movidas, resultará como expresión de la utilidad media lograda por el productor, por cada tonelada producida, transportada y vendida en el mercado

$$\frac{U_{pr. max}}{Q} = \frac{\frac{9\gamma v^3}{64fg}}{\frac{9\gamma v^2}{32fg}} = \frac{v}{2} \quad \therefore \quad U_{pr. max} = \frac{Qv}{2}$$

mientras que la utilidad de la Empresa, por la misma unidad, sólo alcanza a

$$\frac{U}{Q} = \frac{\frac{9\gamma v^3}{256fg}}{\frac{9\gamma v^2}{32fg}} = \frac{v}{8} \quad \therefore \quad U = \frac{Qv}{8}$$

Multiplicando el primer cociente $\frac{U_{pr. max}}{Q}$ por γ , tendremos la utilidad media obtenida de cada km² cultivado; también se puede deducir la cantidad con que contribuye el valor de la producción, para formar la utilidad de la Empresa.

EJEMPLO. — Consideremos un ferrocarril cuyos gastos directos sean $g = 0,014$ \$ m/n por ton; atravesando una zona donde el acarreo por caminos cuesta

0,30 \$ m/n por ton-km; y supongamos que en la zona se cultiva cierto producto cuyo rendimiento por km² es 60 ton y cuyo precio en el mercado es de 85 \$ m/n, siendo 61 \$ m/n el costo de producción. Los valores correspondientes de las fórmulas serán:

$$v = 85 - 61 = 24 \quad \gamma = 60 \quad g = 0,014 \quad f = 0,30$$

La tarifa a aplicar, será $y_t = 2gx = 0,028x$.

La distancia hasta la cual la suponemos aplicada, será

$$x = \frac{3v}{8g} = \frac{3(24)}{8(0,014)} = 642 \text{ km.}$$

pero la distancia máxima hasta la cual podrían hacerse transportes, es

$$x = \frac{v}{2g} = \frac{24}{0,028} = 857 \text{ km.}$$

La producción de la zona de afluencia en los primeros 642 km, será

$$Q = \frac{9\gamma v^2}{32fg} = \frac{9(60)24^2}{32(0,30)(0,014)} = 2.314.285 \text{ ton.}$$

La utilidad obtenida por el total de los productos es

$$U_{pr, máx} = \frac{9\gamma v^3}{64fg} = Q \frac{v}{2} = 27.771.420 \text{ $ m/n}$$

y la que consiguió la Empresa

$$U = \frac{Qv}{8} = 6.942.855 \text{ $ m/n.}$$

De los 24 \$ m/n que constituyen el coeficiente de transporte, quedaron a cada productor, en término medio, $\frac{v}{2} = 12 \text{ $ m/ por tonelada}$, y a la empresa le correspondieron $\frac{v}{8} = 3 \text{ $ m/n}$, total 15 \$ m/n. Los 9 \$ m/n restantes, se gastaron en transportes, por caminos y por ferrocarril.

Como cada tonelada dejó 12 \$ m/n de utilidad al productor, y suponemos que se obtienen 60 ton por cada kilómetro cuadrado, o por cada 100 hectáreas, la utilidad del colono por hectárea será

$$\frac{12 \times 60}{100} = 7,20 \text{ $ m/n}$$

Este es un valor promedio, que puede ser utilizado para estudiar las relaciones posibles entre precios de producción, valores en el mercado y tarifas

admisibles para cada producto, pudiendo determinar así qué cultivos convienen, según los arrendamientos, salarios, etc. También puede estudiarse la influencia de la distancia al ferrocarril, para lo cual bastará tener en cuenta el valor de la correspondiente y_z , dentro de la zona. En el límite extremo, la ganancia del cultivador ya vimos que era sólo $\frac{v}{4} = 6 \$ \text{ m/}$, o sea la mitad del término media. Una hectárea, en los límites de la zona de afluencia, no produce en estas condiciones más que

$$\frac{6 \times 60}{100} = 3,60 \$ \text{ m/a.}$$

si se cultiva con el mismo vegetal, y si la tierra tiene el mismo rendimiento; pero si se trata de otro, para el que γ o v tengan distinto valor y siempre que la empresa aplique las mismas tarifas, la utilidad del colono, por hectárea, podrá ser otra, y en general quedará expresada por $\frac{v \gamma}{4}$.

Lo anterior vale para una línea férrea de longitud $\frac{3v}{8g}$, que se supone cultivada a ambos lados de la vía hasta los límites de la zona de afluencia. Pero en la práctica, el caso más frecuente es el de tener que calcular tarifas para longitudes de vía menores. Entonces, la tarifa que produce el máximo de utilidad a la Empresa, será mayor que $2gx$, pero menor que

$$\frac{v - g_{pr}}{x_0} x ;$$

la ordenada de la zona será

$$y_z = \frac{v - y_t - g_{pr}}{f}$$

y de acuerdo con fórmulas repetidamente planteadas,

$$dQ = 2 \gamma y_z dx = \frac{2 \gamma}{f} (v - y_t - g_{pr}) dx$$

$$dU = (y_t - gx) dQ$$

Para el caso de tarifas kilométricas, $y_t = \lambda x$, siendo λ el coeficiente de la tarifa a determinar. Integrando entre 0 y x_0 , se llega a

$$U = \frac{\gamma x_0^2}{3f} (\lambda - g) [3(v - g_{pr}) - 2\lambda x_0]$$

Este valor será máximo para

$$\lambda = \frac{3(v - g_{pr})}{4x_0} + \frac{g}{2}$$

y entonces

$$U_{máx} = \frac{\gamma x_0}{24 f^2} [3(v - g_{pr}) - 2g x_0]^2$$

La zona de afluencia considerada es la trapezoidal, despreciando la producción del semicírculo de punta de rieles, que aquí tendrá un radio al valor de la y_z , para x_0 , o sea

$$\begin{aligned} y_z &= \frac{v - g_{pr}}{f} - \frac{3(v - g_{pr})}{4f} - \frac{g x_0}{2f} \\ &= \frac{v - g_{pr}}{4f} - \frac{g x_0}{f} \end{aligned}$$

Es claro que para un mismo x_0 , fijado g_{pr} se tiene determinado un valor de λ , que produce esta utilidad máxima a la Empresa. Pero se puede afinar más la investigación, y determinar también a g_{pr} de modo que nos produzca un máximo en la utilidad del conjunto de productores. La investigación resulta un poco laboriosa, y conduce a fórmulas complicadas cuyo manejo no es práctico. El camino a seguir es el siguiente; se escribe la expresión de la utilidad de los productores que ya vimos es

$$U_{pr} = \frac{\gamma}{f} \int_0^{x_0} [(v - y_t)^2 - g_{pr}^2] dx$$

se sustituye a y_t por su valor:

$$y_t = \lambda x = \left(\frac{3(v - g_{pr})}{4x_0} + \frac{g}{2} \right) x$$

y se integra; el resultado será una cierta función de g_{pr} , de la cual obtendremos por derivación, el valor de g_{pr} que sustituido en U_{pr} nos conducirá al valor máximo buscado.

(Continuará)

SECCION CONFERENCIAS

EL EFECTO DE ENTALLADURA EN LA MECANICA DE LOS MATERIALES

POR EL ING. CIVIL

SIMON A. DELPECH

Conferencia pronunciada en la Sociedad Científica Argentina el 3 de agosto de 1945.

1. — BARRA DE SECCION CIRCULAR UNIFORME SOMETIDA A UN ESFUERZO DE TRACCION AXIAL

Imaginemos que la figura 1 proyectada, en la parte izquierda, representa una barra de metal o aleación, de sección circular, sometida a un esfuerzo de tracción axial. Si la sollicitación se ejerce exactamente según el eje longitudinal de la barra, y ésta presenta un

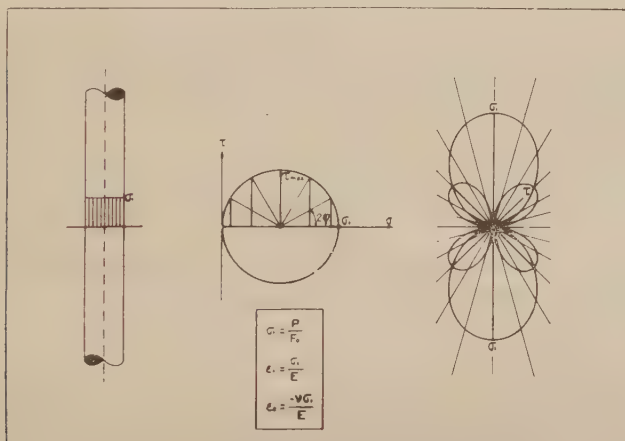


FIG. 1.

perfil uniforme, en el material se originará un estado de tensión simple y homogéneo. Simple, porque existirá solamente una tensión normal principal σ_1 en la dirección del esfuerzo, siendo nulas las otras dos tensiones normales principales posibles, σ_2 y σ_3 , perpendi-

culares a σ_1 . Homogéneo, porque todos los puntos pertenecientes a la barra tendrán igual tensión σ_1 , cualquiera sea la sección de la misma, y cualquiera también el punto dentro de la sección.

La parte del centro de la figura 1 indica el diagrama de Mohr, donde están representadas las tensiones normales (eje de las abscisas) y las tangenciales (eje de las ordenadas). La parte derecha de la misma figura nos muestra, en coordenadas polares, los valores de las tensiones normales y tangenciales para todas las posiciones del plano de la sección sobre el cual se consideren aplicadas las tensiones.

A su vez los alargamientos elásticos específicos principales en esta barra serán, como es conocido:

$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \text{ en la dirección longitudinal}$$

$$\epsilon_3 = \epsilon_2 = \frac{-\nu \sigma_1}{E} \text{ en una dirección transversal cualquiera.}$$

Recordamos así que los alargamientos elásticos en cualquier dirección normal a la longitudinal (transversal) son negativos (acortamientos). Es lo que caracteriza la contracción de Poisson, cuyo valor está expresado por el coeficiente ν en la última ecuación. Para comprobarlo bastaría disponer de un instrumento que midiera las deformaciones transversales de la barra.

2.º— CASO EN QUE LA BARRA PRESENTA UNA ENTALLADURA UNIFORME

Veamos ahora el caso en que la barra presenta una entalladura uniforme en toda una sección, y que esta entalladura tenga la forma angular, como muestra la figura 2 proyectada. Indiquemos con la letra D al diámetro de la barra y con d minúscula al del núcleo, o sea lo que queda de la misma en la sección entallada. Designemos con la letra k la relación entre la sección del núcleo y de la barra; tendremos así:

$$k = \frac{\pi d^2/4}{\pi D^2/4} = \frac{d^2}{D^2}$$

Midamos nuevamente la deformación transversal como lo hicimos con la barra lisa, pero ajustando el instrumento sobre el núcleo

en la sección entallada; y repetamos esta operación con diferentes valores de k , o mejor dicho con entalladuras que manteniendo un ángulo constante vayan aumentando de profundidad. Nos encontraremos con la siguiente sorpresa: que a partir de una cierta profundidad de entalladura, y siempre bajo el esfuerzo de tracción longitudinal, el diámetro del núcleo aumenta en vez de disminuir.

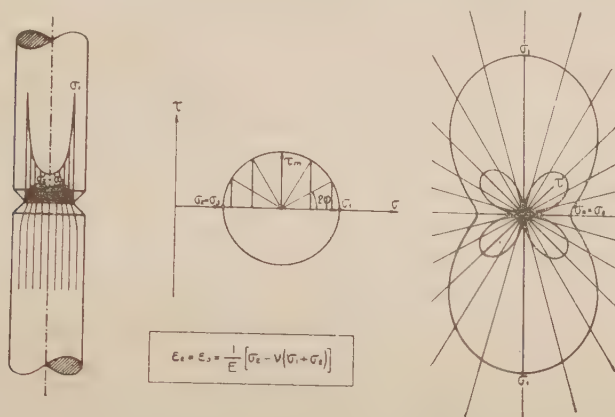


FIG. 2.

La interpretación de esta aparente anomalía está en que en la parte entallada (y próxima a la entalladura también) el estado de tensión no es ya homogéneo ni simple, como en la probeta lisa, sino heterogéneo y triple. En efecto, debido al estrechamiento de la sección, las líneas de tensiones principales, denominadas isostáticas, se concentran en el núcleo hacia la base de la entalladura donde alcanzan el valor máximo, para disminuir luego a medida que se aproximan al centro del mismo, como puede observarse esquemáticamente en la figura 2. Es decir, que las tensiones normales principales σ_1 varían según la posición del punto considerado, resultando así un estado heterogéneo de tensión. A su vez, la convergencia de isostáticas da origen a tensiones de tracción en la dirección transversal del núcleo, es decir, al nacimiento de las otras dos tensiones normales principales σ_2 y σ_3 , que complementan el estado triple. Las tensiones σ_2 y σ_3 son iguales por simetría, debido a la sección circular de la barra y del núcleo y varían también de un punto a otro del mismo, pero en forma más o menos inversa al de la tensión principal longitudinal, pues son nulas en la base de la entalladura

y su intensidad aumenta hacia el centro, alcanzando su máximo antes de llegar a él.

Y bien, es este estado triple de tensión el que da lugar al ensanchamiento de acuerdo con la expresión siguiente, deducida de la teoría de la elasticidad:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

Como se observa, intervienen las tres tensiones principales: σ_1 , σ_2 y σ_3 , pero esta última es igual a σ_2 . De la superposición de sus efectos resultará el signo del alargamiento transversal. Así, cuando σ_2 sea suficientemente grande con respecto a σ_1 , hará prevalecer su signo positivo de acuerdo con el primer término del corchete, y entonces, el núcleo aumentará de sección. El aumento de valor de σ_2 con respecto a σ_1 es función de la profundidad de entalladura.

El profesor Kuntze, del Instituto de Mecánica de los Materiales de Dahlem, Berlín, por medio de un estudio sistemático de la influencia de entalladura, con entalladura angular, ha llegado a obtener experimentalmente las conclusiones siguientes: a), que el alargamiento específico transversal ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3$) varía linealmente con la sección relativa k y con el ángulo ω de la entalladura; b), que en el caso límite en que k sea cero (entalladura total) y ω igual a cero también, los alargamientos elásticos específicos y las tensiones normales, son iguales en todas direcciones. Es decir, que se produce así un estado triple en el cual las tensiones normales son iguales en todas direcciones y las tensiones tangenciales desaparecen.

Llamará la atención que aquel autor haya podido experimentar con probetas totalmente seccionadas por la entalladura y que ellas puedan tener un ángulo de cero grados, es decir que el corte sea normal a la barra. En realidad se trata de una condición virtual, físicamente irrealizable y a la que se llega por una doble extrapolación, la una en función del valor de k y la otra en función del ángulo ω . Demás está decir que los alargamientos transversales obtenidos con el instrumento representan valores medios de la deformación, pues abarcan a toda la sección del núcleo, la cual experimenta alargamientos específicos variables en cada punto, a causa de la modificación de la tensión, también variable en cada punto.

3. — RESISTENCIA DE COHESION

Con una técnica análoga, el Profesor Kuntze determinó también la resistencia ofrecida por el material con barras entalladas y sin entallar. Algunos de los resultados pueden observarse en la figura 3, parte superior, donde las abscisas representan los valores de k y las ordenadas las resistencias. Para $k = 1$, o sea, sin entalladura,

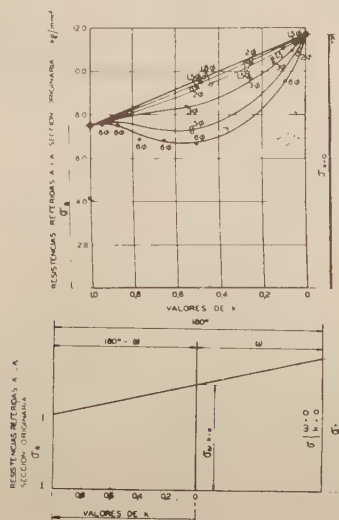


FIG. 3.

la ordenada σ_B no es otra que la resistencia a la tracción, la cual resulta de dividir la carga máxima acusada por la máquina de ensayo, por la sección inicial de la barra. A medida que k disminuye, vale decir que la entalladura aumenta, el material se comporta de distinta manera. Vemos así que para barras de 6 mm de diámetro, la resistencia (carga máxima dividida por la sección inicial del núcleo), disminuye al principio, para aumentar después. Y que, con diámetros menores de la barra original (sobre la que se hizo luego la entalladura), las curvas que resultan van siendo menos pronunciadas hasta transformarse prácticamente en una recta, cuando el diámetro se aproxima a 2,00 mm. A su vez, todas las curvas convergen por extrapolación a un punto donde k se hace igual a cero, o sea para la barra totalmente seccionada por la entalladura; este valor se designa con $\sigma_k = 0$.

La interpretación de estos fenómenos podemos tenerla siguiendo el diagrama de tracción de la figura 4 proyectada. Este diagrama corresponde, como es sabido, a una barra sin entallar. El estado de tensión que se origina en el material es, como vimos al principio, simple y homogéneo. Pero con la entalladura se transforma en triple y heterogéneo. La condición de ser triple, favorece al ma-



FIG. 4.

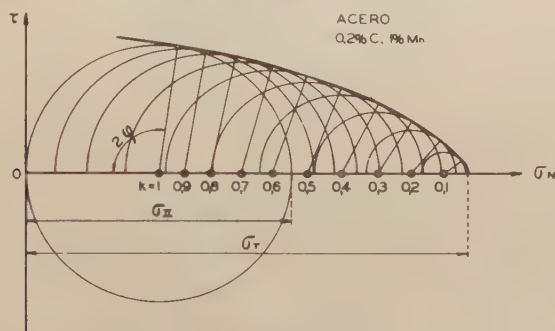
terial, porque reduce el diámetro de los círculos de Mohr, y con ello el valor de las tensiones tangenciales, que son las causantes de la deformación plástica. Por eso las resistencias aumentan o tienden a aumentar según la recta que une los valores extremos de σ_B . Y $\sigma_k = 0$.

Pero la condición de estado heterogéneo hace que los diversos puntos del material en la sección del núcleo se encuentren distintamente solicitados, y por ello desplazados en el diagrama de tracción. Puede suceder así que los puntos correspondientes a la base de la entalladura, donde están los picos de tensión, hayan llegado al punto III del diagrama, sin que el resto del material alcance el punto II, de la carga máxima. La barra se romperá así antes de que el material haya podido rendir toda su capacidad de resistencia. Esto explica la razón del porqué las curvas de la figura anterior se alejan de la recta y que ese alejamiento aumenta con el diámetro, por cuanto quedan así más separadas las partes distintamente solicitadas.

La condición para que el material no sufra estas roturas prematuras, y que Kuntze denomina « condición de carga máxima », estaría en que el diagrama de tracción sea lo suficientemente pronunciado en la dirección de los alargamientos, como para que el material alcance rápido la carga máxima o próxima a ella, y luego tenga un largo recorrido antes de llegar al punto III. De cumplir

o no cumplir con esa condición, el material resultará insensible o sensible a la entalladura.

Así como se ha llegado a obtener por extrapolación $\sigma_{\omega, k=0}$, que es la resistencia para un ángulo ω cualquiera y entalladura total, puede determinarse por otra extrapolación, el valor de $\sigma_{\omega=0, k=0}$, cuando también el ángulo ω es igual a cero. Para esto se toma en la figura 3 la distancia correspondiente a los valores extremos de k , como iguales a $180^\circ - \omega$, y en esa nueva escala, como lo muestra la misma figura 3, parte inferior, se continúa la recta que representa la resistencia hasta la abscisa igual a 180° . En el extremo, encontraremos por esta nueva extrapolación el valor de la resistencia para $k=0$ y $\omega=0$. Este nuevo valor $\sigma_{\omega=0, k=0}$, o también σ_T , Kuntze lo denomina « resistencia de cohesión » por corresponder a la rotura debida exclusivamente a tensiones normales de tracción. El material se rompe así por la separación de sus átomos, sin que intervengan deslizamientos, pues no existen tensiones tangenciales que los originan.



REPRESENTACION DE MOHR

Fig. 5.

La figura 5 muestra los distintos círculos de Mohr que se forman para un ángulo $\omega = 0$, y valores de k desde $k = 1$ hasta $k = 0$, donde se encuentra finalmente σ_T . Sobre todos esos círculos aparece la envolvente de Mohr.

4. — SOLICITACIONES DINAMICAS REPETIDAS. FATIGA

Lo que en verdad interesa en muchas estructuras metálicas y especialmente en los elementos de máquinas, no son las solicitaciones estáticas, como las que hemos considerado hasta ahora, sino las

dinámicas, las cuales se repiten en forma prácticamente indefinida. Corresponde entonces conocer el efecto que en estas sollicitaciones puede tener la entalladura. Comenzaremos previamente por su estudio con barras o probetas lisas.

Es un hecho bien conocido que los materiales sometidos a tensiones dinámicas de trabajo se rompen cuando las mismas exceden ciertos valores que dependen del material. El plazo en que alcanzan la rotura varía así con el exceso de tensión. La rotura comienza en la parte más sollicitada y va progresando lentamente en forma de fisura, hasta que la pieza, debilitada, finalmente se rompe de golpe. Por tanto, en toda rotura por fatiga deben distinguirse dos zonas: la fatigada y la residual. La primera es paulatina, la segunda es violenta y con cierta deformación plástica.

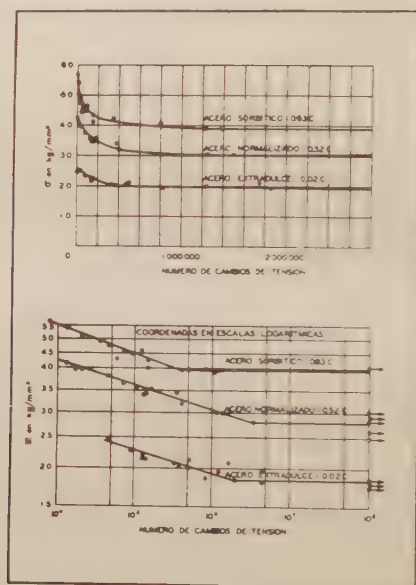


FIG. 6.

En los laboratorios se trata de reproducir el fenómeno de fatiga en forma sistemática. Para ello se someten probetas de ensayo a sollicitaciones simples (tracción-compresión, flexión, torsión) que producen tensiones dinámicas que varían entre dos límites, superior e inferior, y que se repiten hasta producir la rotura. Estas operaciones se realizan con diferentes probetas procedentes del mismo material, a cada una de las cuales se les da diferentes valores de tensión aunque manteniendo en todas ellas igual tensión media.

La figura 6 proyectada muestra la curva de Wöhler. Las ordenadas representan las diferencias de tensión entre los límites superior e inferior y las abscisas indican la cantidad de variaciones que conducen a la rotura. A medida que la amplitud disminuye, el número de variaciones que soporta el material aumenta, y en forma tal, que la curva se vuelve asintótica con el eje de las abscisas. Esto indica que al llegar a una cierta amplitud el número de variaciones de tensión es prácticamente ilimitado. Dicho valor de la amplitud representa el límite o « resistencia de fatiga » del material para la tensión media adoptada.

El ensayo completo para un mismo material, sollicitación y demás condiciones técnicas, requiere diferentes curvas de Wöhler, o sea, distintas tensiones medias. Con el fin de representar en un mismo diagrama los resultados de todas las curvas de Wöhler, Smith

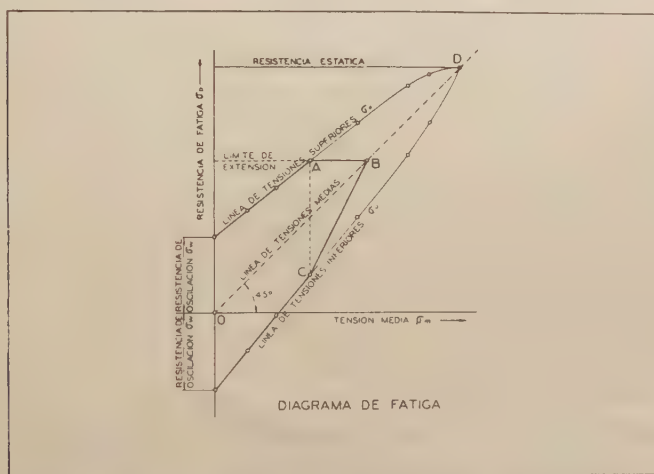


FIG. 7.

ha ideado el diagrama de fatiga que muestra la figura 7 proyectada, en la cual las abscisas representan las tensiones medias y las ordenadas las tensiones extremas. Para realizar el estudio con distintas tensiones medias, previamente se dan a las probetas cargas estáticas variables que producen diferentes tensiones, también estáticas y previas, a las que se suman las dinámicas de fatiga. Por eso se denomina « tensión media » o « tensión estática previa ».

En el diagrama de fatiga puede verse cómo la amplitud varía desde el valor máximo, correspondiente a una tensión previa igual

a cero, hasta volverse ella misma igual a cero cuando la tensión previa alcanza el valor máximo. Este último valor de la tensión estática corresponde a un ensayo de «duración estática» y que consiste en someter al material a una carga estática que se mantiene muy largo tiempo hasta producir la rotura. En muchos materiales, como los aceros, prácticamente puede tomarse para este último valor (resistencia estática de duración), la resistencia estática común, es decir, la resistencia obtenida en un tiempo limitado como ya lo hemos visto.

5. — INFLUENCIA DE LA FORMA. ENTALLADURA

Hasta aquí hemos considerado el ensayo de fatiga como realizado con probetas ideales, es decir con la parte calibrada uniforme en todo su largo, con las zonas de transición debidamente adaptadas para evitar cualquier solución de continuidad y con la superficie pulida. (Se entiende también que la probeta se encuentra en un medio no corrosivo). Cumplidos estos requisitos, las tensiones calculadas y que se deducen de las ecuaciones comunes de resistencia de materiales, pueden ser consideradas como las verdaderas, aproximadamente. Por eso ellas revelan las propiedades del material. Pero, al no cumplir las probetas las condiciones que se acaban de señalar, las tensiones verdaderas que sufre el material se alejan de las obtenidas por cálculo y pueden alcanzar valores muy distintos.

Recordemos que en los ensayos mecánicos, casi sin excepción, las tensiones que se atribuyen al material son las nominales, o sea las que se deducen por cálculo aplicando las ecuaciones más comunes de la resistencia de materiales y que resultan de las condiciones de sollicitación y forma de la probeta. Pero, al complicarse esta última, la repartición de las tensiones resulta compleja, como hemos visto, e incalculable con las ecuaciones de resistencia y aún con las de la elasticidad. Ahora bien, en los esfuerzos de fatiga tiene una importancia excepcional el valor de las tensiones máximas, pues ellas son las que originan la rotura, aún cuando se reduzcan a una zona muy pequeña del material. Por eso el conocimiento de las tensiones reales o su consideración es indispensable en los ensayos de fatiga. Al realizarse estos ensayos con probetas irregulares se siguen entonces dos caminos complementarios: 1º, la obtención independiente de las tensiones verdaderas por algún procedi-

miento experimental; 2º, el cálculo de las tensiones nominales que resultan de la forma especial, lo mismo que para las probetas ideales, obteniéndose valores ficticios de la resistencia de fatiga y que están afectados por la forma. La parte *a*) de la figura 8 proyectada, según Thum, muestra en forma esquemática la verdadera repartición de las tres tensiones normales principales (estado de tensión triple $\sigma_2 = \sigma_3$) en la entalladura circular de una probeta cilíndrica, sometida a un esfuerzo de tracción, como ya lo vimos en la entalladura angular. La parte *b*) de la misma figura presenta la repartición de las dos tensiones principales (estado de tensión doble $\sigma_3 = 0$),

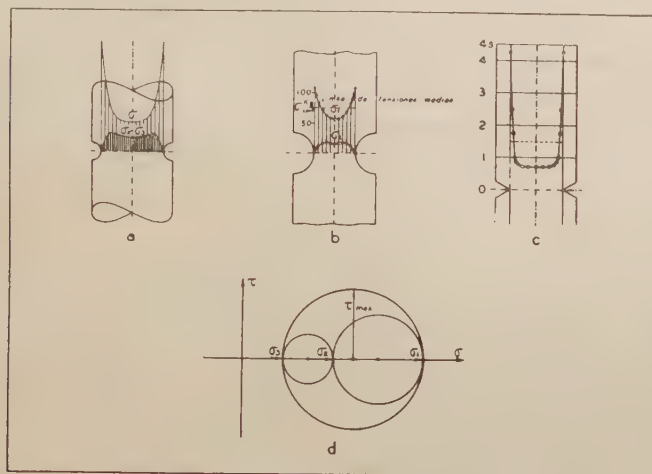


FIG. 8.

según Coker y Filon, en una probeta plana con entalladura circular sometida también a la tracción. Y la parte *c*) muestra una tensión principal, la longitudinal (estado de tensión doble), según Armbruster, en una probeta plana con entalladura angular, sometida al mismo esfuerzo.

De la repartición irregular de tensiones interesan las máximas, como se dijo, que son las que dan origen a la rotura. Con respecto a esta última, y sin entrar en las diversas hipótesis, desde la primitiva y ya abandonada de la cristalización, puede decirse hoy que existe un acuerdo casi general en considerar a las tensiones tangenciales como la causa inicial de la rotura por fatiga. Como es sabido, las tensiones tangenciales originan deslizamientos de los átomos dentro de cada grano del metal o aleación. Este deslizamiento

produce una deformación plástica de la malla cristalina, la que traería (según algunas de estas teorías) como consecuencia, deformaciones elásticas causantes del endurecimiento mecánico del material. En el caso de esfuerzos repetidos, las tensiones locales debidas a las deformaciones plásticas producirían la rotura de la malla en algún punto, originando así la fisura progresiva.

El efecto de las tensiones tangenciales máximas y de las tensiones normales máximas también, se encargaría de conducir el material a la rotura.

Si volvemos a la figura 8 y la analizamos valiéndonos de la representación de Mohr, como podemos observar en la parte d), veremos que en la base de la entalladura de las probetas es donde se encuentra la mayor tensión tangencial y también la máxima tensión normal de tracción; allí es donde siempre tiene origen la rotura, si otros factores extraños no modifican las condiciones, por ejemplo, defectos locales en otros puntos menos solicitados.

FORMA DE LA PROBETA DIMENSIONES EN mm	FLEXION ROTATIVA				TORSION ALTERNADA			
	RESISTENCIA A FATIGA		β_0	α_0 ESTIMADA	RESISTENCIA A FATIGA		β_0	α_0 ESTIMADA
	PROBETA NORMA.	PROBETA ESPECIAL σ_{max} en kg/cm ²			PROB. NORM.	PROBETA ESPECIAL τ_{max} en kg/cm ²		
	SI 37 (A)	10.5	2.63	2.4	SI 37 (A)	0.5	1.55	1.85
		9.5	2.58		Tu = 18.2 kg/cm ²	9.0	80	1.90
		10.5	2.63	2.4		0.5	1.55	1.85
		10.5	2.63	2.4		0.5	1.55	1.85
		10.5	2.63	2.4		0.5	1.55	1.85
		10.5	2.63	2.4		0.5	1.55	1.85

$\beta_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_L}$

FIG. 9.

En la figura 9 que se proyecta se reproduce un cuadro extraído de un trabajo de Thum donde puede apreciarse la influencia de la forma en diferentes probetas con ensayo de fatiga por flexiones rotativas y torsiones alternadas.

En la segunda y sexta columna se indica el valor de la resistencia de fatiga con una probeta ideal, o sea, el verdadero valor de la resistencia. En la tercera y séptima columna figuran los valores de la resistencia obtenidos con la influencia de la forma, es decir, la

resistencia nominal. En la cuarta y octava columnas se han indicado con las letras β_k la relación entre la resistencia real y la nominal. Finalmente, en las columnas quinta y novena, las letras α_k señalan para las probetas irregulares la relación entre sus tensiones máximas (picos), obtenidas experimentalmente o estimadas, y las nominales.

El coeficiente β_k , que traducimos « influencia de forma », señala, como se dijo, la relación entre la resistencia de fatiga verdadera (máxima) y la afectada por la forma. Es por tanto un valor superior a la unidad, y el cual depende de la forma y del material. El coeficiente α_k , que traducimos « coeficiente de forma », es también mayor que la unidad y representa la relación entre la tensión máxima, obtenida experimentalmente, y la tensión nominal, deducida por cálculo. Está afectado exclusivamente por la forma, siendo independiente del material dentro de su período elástico.

Entre los coeficientes β_k y α_k se ha establecido la relación siguiente:

$$\eta_k = \frac{\beta_k - 1}{\alpha_k - 1}$$

que al traducir designamos « sensibilidad de forma ». Como lo expresa su nombre, este coeficiente señala la sensibilidad que el material presenta al aumento de tensión por fatiga. Así, cuando β_k es igual a la unidad, η_k resulta igual a cero; vale decir que al no modificarse la resistencia de fatiga entre probetas ideales y entalladas, la sensibilidad es nula ($\eta_k = 0$). La sensibilidad resulta máxima, cuando $\eta_k = 1$, al ser β_k igual a α_k . Esto sucede cuando el material es virtualmente elástico hasta la rotura por fatiga. El conocimiento de η_k es útil cuando no se dispone de ensayos suficientes que permitan determinar β_k , el cual se deduce así de la relación que acabamos de ver, en función de α_k , cuya determinación puede realizarse experimentalmente con muy pocos ensayos.

6. — CONCLUSIONES

Como se comprenderá, el problema que se presenta a un constructor de máquinas consiste en la determinación de estos coeficientes cuyas relaciones varían para los diferentes materiales y también con la forma de la pieza o estructura. Por otra parte, hasta la fecha

no existen estudios suficientes que permitan relaciones generales entre estos coeficientes, los cuales deben estudiarse en cada caso particularmente.

El constructor tiene así dos caminos: 1º, si dispone de elementos suficientes de investigación podrá determinar los valores de β_k , y en ese caso llevar las piezas mecánicas a sus dimensiones mínimas, compatibles siempre con la seguridad; 2º, si no dispone de esos elementos, tendrá que basarse en α_k , lo cual le dará probablemente dimensiones mayores en sus piezas. La economía la hará a costa de la investigación o a la del material.



GARANTIA DE SEGURIDAD

El cemento "SAN MARTIN" se ha identificado a través de los años, en el constante desarrollo constructivo del país. Cuando el profesional lo emplea, sabe que su obra queda protegida por la garantía que le brinda un cemento portland de alta calidad uniforme.

CALIDAD — SERVICIO — COOPERACION



Empleando un cemento portland de alta calidad se obtiene mejor hormigón

COMPAÑIA ARGENTINA DE CEMENTO PORTLAND
 RECONQUISTA 46, BUENOS AIRES • SARMIENTO 991, ROSARIO

